ÉCOLE DES MINES DE PARIS

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École des Mines de Paris

en Informatique temps-réel, Robotique, Automatique

présentée et soutenue publiquement par

Pierre-Brice WIEBER

le 6 décembre 2000

Modélisation et Commande d'un Robot Marcheur Anthropomorphe

---

préparée à l'INRIA Rhône-Alpes

sous la direction de M. Bernard ESPIAU

JURY

M. Francis CLARKE	Président
M. Guy BESSONNET	Rapporteur
M. Claude SAMSON	Rapporteur
M. Bernard BROGLIATO	
M. Bernard ESPIAU	

La marche humaine selon Eadweard Muybridge (1830-1904).

La marche humaine selon John Cleese (1939-).

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Avant-propos

“Ce qui se conçoit bien s’énonce plus ou moins clairement,
et les mots pour le dire ne viennent vraiment pas aisément.”
Boileau (1636-1711), additionné d’un peu de réalisme...

L’objectif de ce travail de thèse est de pouvoir donner à un robot anthropomorphe la capacité de marcher par ses propres moyens, mais face à la complexité de cette tâche, c’est surtout à quelques questions simples que nous avons voulu répondre :

– **pourquoi marcher, comment marcher, qu’est-ce que marcher?**

Pour répondre à ces questions, nous avons dû décrypter les phénomènes physiques qui sont mis en jeu et mettre en évidence l’importance des appuis au sol pour les déplacements d’un robot. Nous avons alors pu mettre en avant la diversité des mouvements que recouvre le fait de marcher, diversité qui est absolument nécessaire à l’équilibre du robot. Cette étude se conclue finalement sur la proposition d’une coordination de mouvements (une *loi de commande*) qui devrait permettre d’assurer le bon déroulement des déplacements du robot.

Ces quelques questions sur la marche ont donc été abordées dans le cadre de la robotique, c’est à dire en combinant des notions de plusieurs disciplines :

– **la mécanique**, au sens de théorie des mécanismes, qui permet de décrire et d’interpréter les mouvements d’un robot,

– **l’automatique**, qui précise l’art et la manière d’en contrôler les moindres mouvements,

- **l'informatique**, au sens de traitement de l'information, pour prendre en compte l'environnement du robot et pour réagir en conséquence,
- **la technologie**, car ces disciplines sont appliquées en définitive à un robot, composé de mécanique, d'électronique et d'informatique.

Ce travail de thèse s'est ainsi amplement nourri de mécanique et d'automatique, abordant également quelques questions d'ordre technologique. La structure en trois parties de cette thèse reflète d'ailleurs ce découpage thématique, chaque partie étant consacrée à l'un de ces thèmes.

Chapitre 0

Les robots marcheurs anthropomorphes

On qualifie de robot marcheur tout robot qui se déplace en marchant, par opposition aux robots équipés de roues ou de chenilles qui, eux, se déplacent en roulant. La réalisation complète d'un robot marcheur nécessite de résoudre un grand nombre de difficultés, de celles que l'on retrouve régulièrement en robotique : perception de l'environnement, planification des déplacements et des tâches à réaliser, manipulation d'objets, interaction avec des personnes humaines... Mais le seul problème qui soit spécifique aux robots marcheurs, c'est la réalisation d'une marche stable, et c'est sur ce problème que nous nous sommes concentrés. Petit tour d'horizon...

0.1 Pourquoi des robots marcheurs anthropomorphes?

Dès qu'il est nécessaire de faire traverser par un robot un terrain accidenté ou encombré d'obstacles, par exemple une centrale nucléaire ou une usine chimique ayant subi une avarie, les robots marcheurs présentent des capacités de déplacement bien supérieures aux robots équipés de roues ou de chenilles (figure 0.1). Ceci est dû au fait qu'en général, des roues ou des chenilles doivent rester en permanence en contact avec le sol, alors qu'un robot marcheur se contente de points d'appui épars sur lesquels poser momentanément ses pieds.

Un robot marcheur peut se présenter sous plusieurs formes : il peut être anthropomorphe, mais il peut tout aussi bien être quadrupède, hexapode ou octopode. En dehors de l'effet

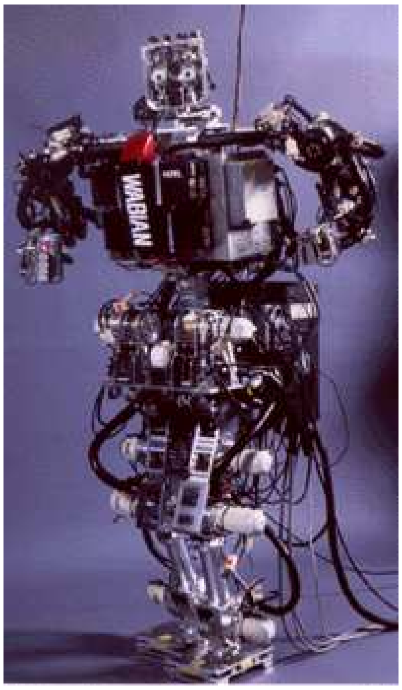
FIG. 0.1: *Dès qu'il est nécessaire de faire traverser à un robot un terrain accidenté, les robots marcheurs présentent des capacités de déplacement bien supérieures aux robots équipés de roues ou de chenilles.*

psychologique que peut provoquer leur forme humaine, les robots anthropomorphes présentent l'intérêt supplémentaire de pouvoir être impliqués dans des recherches en biomécanique. Les expérimentations sur les robots anthropomorphes peuvent ainsi participer à une meilleure compréhension de la marche humaine et de ses pathologies, dans le but à terme d'aider à la conception de prothèses et d'orthèses intelligentes.

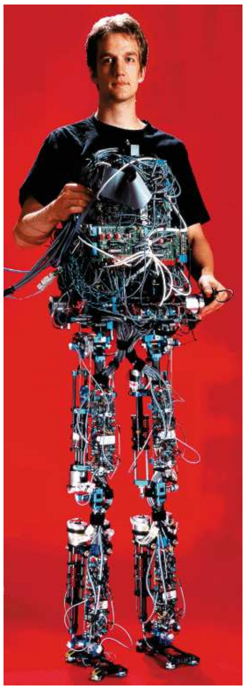
0.2 Quelques réalisations actuelles

Les robots marcheurs ont été étudiés dès l'origine même de la robotique [46], et les réalisations sont maintenant nombreuses [63]. Mais par rapport aux robots quadrupèdes, hexapodes ou octopodes, les robots bipèdes ont longtemps été beaucoup plus rares, car ils sont d'une mise en œuvre plus difficile du fait d'une plus grande instabilité (nous en verrons la raison dans le chapitre 3). Si les projets de robots bipèdes se multiplient de nos jours [64, 65], seuls quelques-uns atteignent toutefois un degré d'achèvement satisfaisant, tant du point de vue de la conception mécanique que de la mise au point de lois de commandes adaptées.

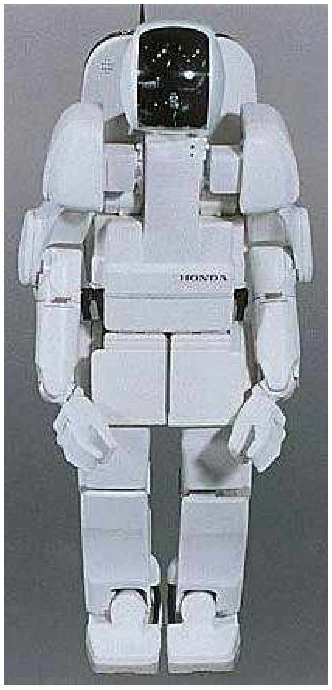
Deux laboratoires se distinguent tout particulièrement, le Humanoid Robotics Institute de la Waseda University [66], et le Leg Laboratory du Massachusetts Institute of Technology [67], dans lesquels de nombreuses générations de robots marcheurs ont déjà été développées. Leurs tous derniers prototypes, respectivement dénommés WABIAN et M2 (figure 0.2), bénéficient de leur longue expérience et font incontestablement partie des projets les plus aboutis. La firme HONDA a su également créer l'événement en présentant après plus de dix ans de recherches tenues secrètes une série de prototypes, dont le dernier modèle, dénommé P3 (figure 0.2), représente sans aucun doute et à tous points de vue la réalisation la plus aboutie en la matière.



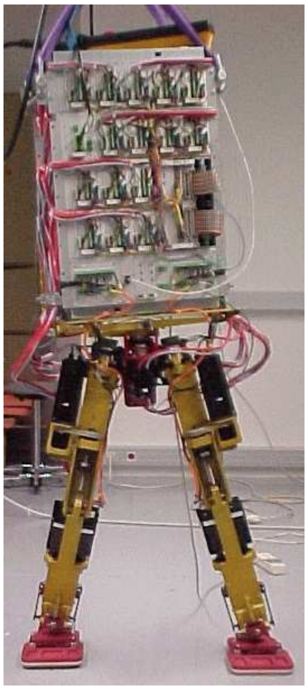
Waseda University : WABIAN



MIT : M2



HONDA : P3



LMS/INRIA : BIP

Fig. 0.2: *Quelques-uns des projets les plus aboutis.*

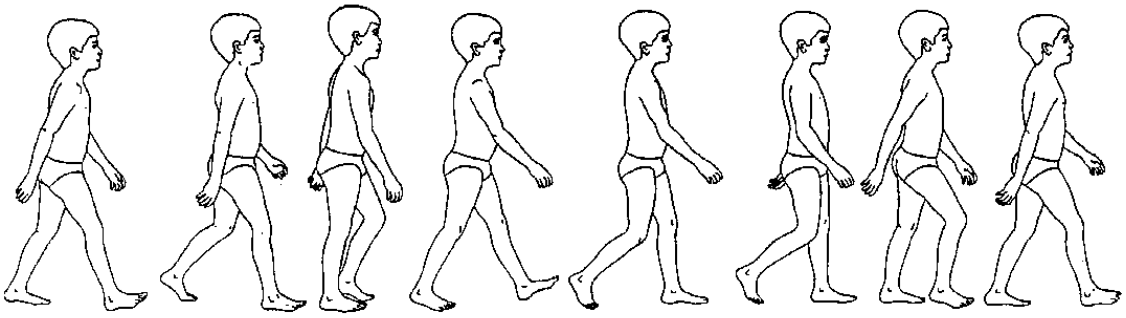


FIG. 0.3: *Décomposition d'un cycle de marche [57].*

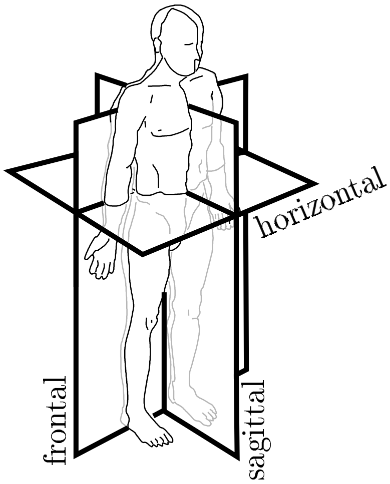


FIG. 0.4: *Les plans principaux servant à l'étude de la marche.*

Le robot BIP (figure 0.2), développé conjointement par le Laboratoire de Mécanique des Solides de Poitiers et l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique de Rhône-Alpes, se place d'emblée comme un concurrent sérieux de par la qualité de sa conception mécanique et de sa réalisation, mais la mise au point de lois de commande adaptées ne fait que commencer, cette thèse n'en présentant que les tous premiers développements. Nous profiterons d'ailleurs du chapitre 5 pour proposer une comparaison des différentes lois de commande qui ont été mises en œuvre pour chacun de ces robots [27, 45, 60].

0.3 Introduction à la marche humaine

La marche est un mode de locomotion pendant lequel le sujet possède toujours au moins un pied au sol (figure 0.3), ce qui donne naissance à une alternance de phases de *simple support* (un seul pied au sol) et de phases de *double support* (deux pieds au sol). Cette alternance n'implique pas pour autant qu'un mouvement de marche soit répétitif, et l'on peut même noter qu'il l'est d'autant moins que le terrain est accidenté.

Si l'on observe un mouvement de marche dans trois plans différents de l'espace (figure 0.4), le déplacement du sujet a lieu principalement dans le plan sagittal, mais de nombreux mouvements apparaissent également dans chacun des autres plans, déhanchement, déplacement latéral et rotation du bassin, qui ne doivent pas être négligés car ils améliorent considérablement la fluidité du mouvement [47]. Remarquons de même la diversité des contacts qui sont établis avec le sol, mettant en jeu parfois la totalité d'un pied, parfois uniquement son talon ou ses orteils. Ceci permet une meilleure absorption des chocs et une plus grande extension des jambes, qui participent également à une meilleure fluidité du mouvement [47].

La notion de fluidité n'est pas anodine et révèle une certaine forme d'économie de mouvements, caractéristique qui est attribuée assez généralement à tout mouvement humain ou animal. Un ensemble de principes énergétiques simples président en effet aux mouvements de marche et permettent une réduction substantielle de la dépense d'énergie [16, 17]. Il a même été montré qu'une dépense d'énergie presque nulle pouvait être envisagée dans certains cas [33, 37]. Une telle économie d'énergie présente un intérêt considérable pour un robot marcheur, dont l'autonomie conditionne fortement les capacités de déplacement et d'intervention.

A propos de fluidité et d'économie de mouvements, on peut observer que les démarches présentées en ouverture de cette thèse, respectivement enregistrées par Eadweard Muybridge et par John Cleese, proposent des solutions radicalement différentes.

Première partie

Dynamique d'un robot marcheur

Chapitre 1

Dynamique d'un robot

Chaque mouvement que réalise un robot est gouverné par un ensemble de lois physiques, ce que nous appellons sa *dynamique*. Etablir la dynamique d'un robot est un problème classique qui se trouve détaillé dans de nombreux ouvrages [15, 39, 55, 56]. Nous réexposons toutefois dans ce chapitre les points principaux qui permettent d'établir cette dynamique, l'originalité de cet exposé résidant dans l'utilisation du principe de moindre déviation, qui est un principe puissant et simple d'emploi, que nous retrouverons dans le chapitre suivant.

1.1 Dynamique d'un solide

Avant d'étudier la dynamique d'un robot complet, commençons par rappeler les lois qui gouvernent les mouvements d'un simple solide, ce qui nécessite tout d'abord de pouvoir décrire précisément sa position, son orientation, sa vitesse...

Pour décrire la position et l'orientation d'un solide, on peut tout simplement préciser la translation t et la rotation R qui permettent d'y arriver à partir d'une position et d'une orientation de référence (figure 1.1), la rotation R pouvant d'ailleurs être représentée par un triplet d'angles de Cardan θ. Pour décrire la vitesse de ce solide, on peut alors préciser la vitesse de translation $\dot{t}$, et la vitesse de rotation $\dot{R}$ ou la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Mais plutôt que $\dot{R}$ ou $\dot{\theta}$, nous utiliserons par la suite le vecteur vitesse de rotation instantanée ω défini ainsi : $\tilde{\omega} = R^T \dot{R}$ (où $\tilde{\omega}$ est la matrice anti-symétrique représentant le produit vectoriel $\tilde{\omega}\, u = \omega \times u$).

Avec ces notations, les équations de Newton et Euler qui régissent la dynamique d'un

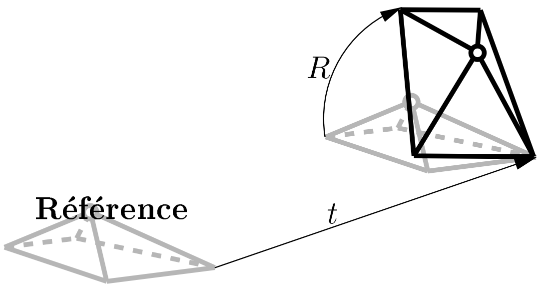


FIG. 1.1: *Pour décrire la position et l'orientation d'un solide, on peut tout simplement préciser la translation t et la rotation R qui permettent d'y arriver à partir d'une position et d'une orientation de référence.*

solide prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= f \\ \mathbb{I}\,\dot{\omega} - \widetilde{(\mathbb{I}\,\omega)}\,\omega &= \tau \end{aligned} \tag{1.1}$$

où m est la masse du solide, x la position de son centre de masse, $\mathbb{I}$ sa matrice d'inertie (symétrique définie positive) exprimée par rapport au centre de masse, f et τ la force et le couple qui sont exercés sur ce solide.

Notons que l'équation d'Euler est formulée dans un repère lié au solide, de même que le vecteur ω, d'où l'apparition du terme gyroscopique $\widetilde{(\mathbb{I}\,\omega)}\,\omega$ (qui introduit un produit vectoriel sous la forme d'une matrice anti-symétrique selon la même notation que précédemment).

1.2 Décrire la position d'un robot

Pour étudier les mouvements d'un robot, il faut d'abord pouvoir décrire la position dans laquelle il se trouve à chaque instant. Un robot est constitué d'un ensemble de solides, et décrire sa position nous amène à détailler la position et l'orientation de chacun d'eux, mais la position d'un robot peut aussi être vue comme faisant participer trois notions complémentaires, le robot se trouvant dans une *posture* donnée, à un *emplacement* donné et dans une *orientation* donnée. La posture décrit ainsi la disposition des solides les uns par rapport aux autres, tandis que l'emplacement et l'orientation permettent de les situer correctement par rapport à l'environnement.

Les solides qui composent le robot sont reliés entre eux par une série d'articulations, et chacune d'entre elles ne permet qu'un type de mouvement bien précis. Les articulations du robot BIP, par exemple, ne permettent que des rotations autour de certains axes (figure 6.1). Ces articulations conditionnent donc la disposition des solides les uns par rapport aux autres,

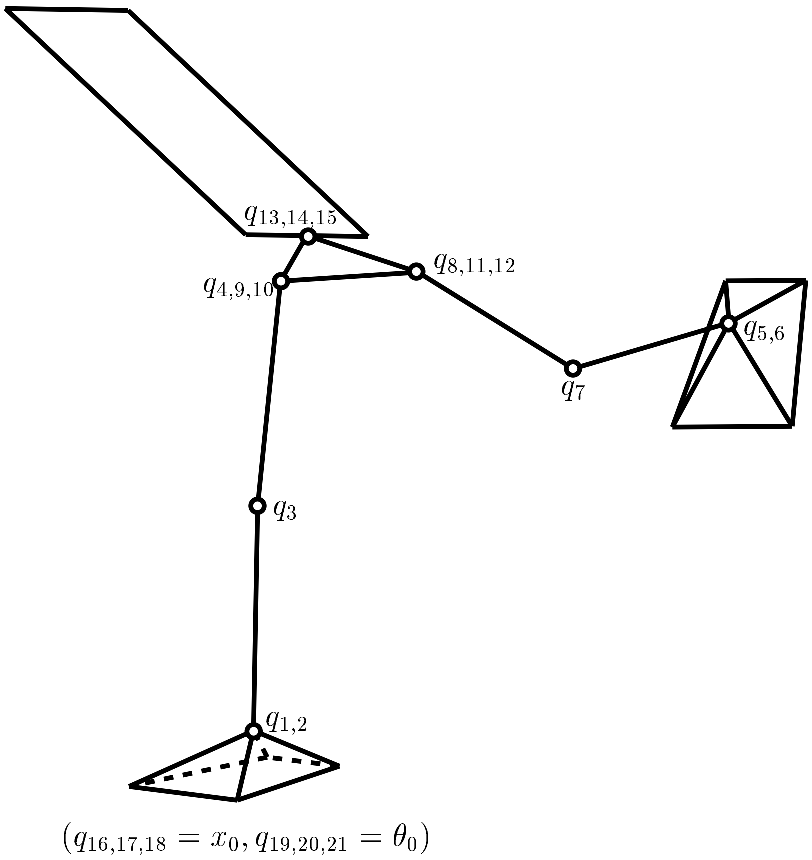


FIG. 1.2: *Les positions articulaires* $q_{1\ldots15}$ *permettent de décrire la posture du robot, tandis que la position et l'orientation* $q_{16\ldots21}$ *de l'un de ses solides (ici, le pied droit) permettent de déduire son emplacement et son orientation. Le vecteur* $q_{1\ldots21}$ *ainsi défini décrit alors complètement la position du robot.*

et il suffit de répertorier les positions dans lesquelles elles se trouvent pour pouvoir décrire complètement la posture du robot.

Une fois déterminée la posture du robot, il suffit de connaître la position et l'orientation de l'un de ses solides pour pouvoir en déduire l'emplacement et l'orientation du robot au complet. En reprenant les notations de la section précédente, on peut décrire la position et l'orientation de ce solide par la position de son centre de masse x_0 et par un triplet d'angles θ_0. On peut alors réunir l'ensemble des positions articulaires ainsi que la position et l'orientation de ce solide pour constituer un vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ qui décrit entièrement la position du robot (figure 1.2).

En déterminant d'une part la disposition des solides du robot les uns par rapport aux autres et en précisant d'autre part la position et l'orientation de l'un d'eux, ce vecteur q

permet donc d'évaluer la position et l'orientation de chacun des solides du robot, selon une procédure qui est détaillée dans le chapitre 6. Ainsi, toute propriété relative à la position du robot ou de l'une de ses parties peut être exprimée en fonction de cet unique vecteur.

1.3 Le principe de moindre déviation

Les solides qui font partie du robot ne peuvent donc se trouver que dans des positions et des orientations compatibles avec les mouvements articulaires. Les équations de la dynamique des solides (1.1) doivent alors être remaniées afin de prendre en compte cette contrainte. Pour cela, nous allons appliquer le principe de Gauss de moindre déviation (équivalent au principe de d'Alembert, extension du principe des puissances virtuelles).

Ce principe stipule que l'accélération d'un système de solides soumis à des contraintes s'écarte le moins possible de l'accélération qu'aurait eu ce même système sans les contraintes [56]. Cet écart, la *déviation*, est mesuré selon une métrique cinétique, c'est à dire qu'il est calculé de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \sum_k \frac{1}{2}\left(\ddot{x}_k - \underline{\ddot{x}}_k\right)^T m_k \left(\ddot{x}_k - \underline{\ddot{x}}_k\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{\omega}_k - \underline{\dot{\omega}}_k\right)^T \mathbb{I}_k \left(\dot{\omega}_k - \underline{\dot{\omega}}_k\right)$$

avec $\ddot{x}_k$ et $\dot{\omega}_k$ l'accélération du solide k, et $\underline{\ddot{x}}_k$ et $\underline{\dot{\omega}}_k$ l'accélération qu'il aurait eu s'il avait été libre de ses mouvements, donc celle directement issue des équations (1.1) :

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{x}}_k &= \frac{f_k}{m_k} \\ \underline{\dot{\omega}}_k &= \mathbb{I}_k^{-1}\,\widetilde{\left(\mathbb{I}_k\,\omega_k\right)}\;\omega_k + \mathbb{I}_k^{-1}\,\tau_k \end{aligned}$$

Le principe de moindre déviation prend donc la forme d'un Problème Quadratique :

$$\min_{\ddot{x}_k,\,\dot{\omega}_k} \;\mathcal{D}$$

qui est strictement convexe, donc qui possède un unique minimum atteint lorsque le gradient s'annule. Notons que l'on définit ainsi une projection de la dynamique des solides sur l'ensemble des positions et des orientations qui sont compatibles avec les mouvements articulaires.

Dans le cas où il n'y a pas de contraintes, on peut vérifier que la condition d'optimalité s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \ddot{x}_k} &= \boxed{m_k\,\ddot{x}_k - f_k = 0} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\omega}_k} &= \boxed{\mathbb{I}_k\,\dot{\omega}_k - \widetilde{\left(\mathbb{I}_k\,\omega_k\right)}\;\omega_k - \tau_k = 0} \end{aligned}$$

où nous retrouvons bien les équations de Newton-Euler pour chaque solide.

1.4 Dynamique d'un robot

La position et l'orientation de chaque solide faisant partie du robot peuvent être exprimées en fonction du vecteur $q \in \mathbb{R}^n$. En dérivant ces positions et ces orientations, ce sont leurs vitesses et leurs accélérations que l'on peut exprimer en fonction de q et de ses dérivées successives :

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= J_{tk}(q)\,\dot{q} \\ \omega_k &= J_{Rk}(q)\,\dot{q} \end{aligned} \tag{1.2}$$

et :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= J_{tk}(q)\,\ddot{q} + \dot{J}_{tk}(q,\dot{q})\,\dot{q} \\ \dot{\omega}_k &= J_{Rk}(q)\,\ddot{q} + \dot{J}_{Rk}(q,\dot{q})\,\dot{q} \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $J_{tk}(q)$ et $J_{Rk}(q)$ sont des jacobiens de translation et de rotation du solide k. A l'aide de ces formules, nous pouvons réexprimer la dynamique de l'ensemble des solides du robot uniquement en fonction de q et de ses dérivées. Ceci permet de prendre en compte implicitement les contraintes articulaires qui pèsent sur les positions et les orientations de ces solides. Le principe de moindre déviation prend alors la forme suivante :

$$\min_{\ddot{q}} \ \mathcal{D}$$

En posant :

$$M(q) = \sum_k J_{tk}^T\, m_k\, J_{tk} + J_{Rk}^T\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk} \tag{1.4}$$

$$N(q,\dot{q}) = \sum_k J_{tk}^T\, m_k\, \dot{J}_{tk} + J_{Rk}^T\, \mathbb{I}_k\, \dot{J}_{Rk} - J_{Rk}^T\, (\widetilde{\mathbb{I}_k\, J_{Rk}\, \dot{q}})\, J_{Rk} \tag{1.5}$$

$$\mathcal{F} = \sum_k J_{tk}^T\, f_k + J_{Rk}^T\, \tau_k \tag{1.6}$$

la condition d'optimalité de ce Problème Quadratique, qui permet de décrire la dynamique du système de solides, devient :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \ddot{q}} = \boxed{M(q)\,\ddot{q} + N(q,\dot{q})\,\dot{q} - \mathcal{F} = 0} \tag{1.7}$$

Cette équation prend une forme similaire aux équations de Newton-Euler (1.1) et, par analogie, on appelle $M(q)$ la matrice d'inertie du système et $\mathcal{F}$ le vecteur des efforts généralisés. Le vecteur $N(q,\dot{q})\,\dot{q}$ rassemble pour sa part des effets non-linéaires tels que les effets centrifuges, gyroscopiques et Coriolis.

1.5 Énergie mécanique et gravité

L'énergie cinétique de l'ensemble des solides peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_k \frac{1}{2}\,\dot{x}_k^T\, m_k\, \dot{x}_k + \frac{1}{2}\,\omega_k^T\, \mathbb{I}_k\, \omega_k \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T M(q)\,\dot{q} \end{aligned}$$

en utilisant (1.2) puis (1.4). Dès lors, la variation d'énergie cinétique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{E}_c &= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T \dot{M}(q,\dot{q})\,\dot{q} + \dot{q}^T M(q)\,\ddot{q} \\ &= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T [\dot{M}(q,\dot{q}) - 2N(q,\dot{q})]\,\dot{q} + \dot{q}^T \mathcal{F} \end{aligned} \tag{1.8}$$

en appliquant (1.7). Or :

$$\dot{M} - 2N = \sum_k (\dot{J}_{tk}^T\, m_k\, J_{tk} - J_{tk}^T\, m_k\, \dot{J}_{tk}) + (\dot{J}_{Rk}^T\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk} - J_{Rk}^T\, \mathbb{I}_k\, \dot{J}_{Rk}) + 2J_{Rk}^T\, (\widetilde{\mathbb{I}_k\, J_{Rk}\, \dot{q}})\, J_{Rk}$$

Chacun des trois termes qui apparaissent dans la somme sont anti-symétriques, donc $\dot{M} - 2N$ l'est aussi, ce qui permet de conclure que le premier terme de (1.8) est nul. Nous avons donc :

$$\dot{E}_c = \dot{q}^T \mathcal{F}$$

où nous pouvons vérifier que la variation d'énergie cinétique du système est dûe au travail des forces exercées sur chacun des solides (donc que les contraintes engendrées par les articulations ne développent aucun travail).

Lorsque le système est soumis uniquement à la gravité, la variation de l'énergie mécanique peut s'écrire :

$$\dot{E}_m = \dot{E}_p + \dot{E}_c = \frac{\partial E_p}{\partial q}(q)\,\dot{q} + \dot{q}^T \mathcal{F}_g = 0$$

avec E_p l'énergie potentielle de gravité et $\mathcal{F}_g$ les efforts généralisés dûs à la gravité. Puisque cette égalité est valable quelle que soit la vitesse $\dot{q}$, nous pouvons déduire que :

$$\mathcal{F}_g = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial q}(q)\right)^T$$

1.6 Le modèle Lagrangien

Un robot est composé en partie d'un assemblage de moteurs et de systèmes de transmission dont le but est de produire une série d'efforts que l'on peut contrôler. Nous approfondirons dans les chapitres 3 et 7 les particularités de ces efforts généralisés, et nous considérerons d'ici là qu'ils sont de la forme $\mathcal{F}_u = T(q)\, u$, où $T(q)$ est une matrice représentant les caractéristiques électromécaniques des moteurs et des transmissions, et u est le vecteur des consignes envoyées aux moteurs. Si l'on pose de plus $G(q) = -\mathcal{F}_g$, la dynamique (1.7) du robot peut se réécrire :

$$M(q)\, \ddot{q} + N(q, \dot{q})\, \dot{q} + G(q) = T(q)\, u \tag{1.9}$$

Remarquons qu'avec ces notations, il est possible de réexprimer le principe de moindre déviation sous la forme du Problème Quadratique :

$$\min_{\ddot{q}} \ \frac{1}{2}\, \ddot{q}^T M(q)\, \ddot{q} + \ddot{q}^T [N(q, \dot{q})\, \dot{q} + G(q) - T(q)\, u] \tag{1.10}$$

Rappelons que ce problème est strictement convexe, ce que nous retrouvons ici dans le fait que la matrice $M(q)$ est symétrique définie positive.

Lorsque la dynamique d'un système est exposée sous la forme (1.9), il est souvent fait référence à un modèle Lagrangien. Ceci vient du fait qu'au prix d'une réécriture minutieuse des dérivées apparaissant dans l'expression de la matrice $N(q, \dot{q})$, il est possible de reformuler (1.9) sous la forme d'une équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = T(q)\, u$$

traduisant le principe de Hamilton de moindre action, qui établit que la dynamique d'un système libre (lorsque $u = 0$) minimise l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_p)\, dt$$

Chapitre 2

Le contact avec le sol

Nous avons vu dans le chapitre introductif que la marche est un mode de locomotion particulièrement bien adapté aux terrains accidentés, car sa réalisation ne nécessite que des points d'appuis épars et momentanés. Le contact avec le sol apparaît donc comme un élément central des mouvements d'un robot marcheur, mais sa modélisation est un problème vaste qui présente encore beaucoup de questions sans réponses [10, 22]. Nous allons donc présenter dans ce chapitre le modèle de contact qui nous semble le mieux adapté aux problèmes de simulation et de commande, et nous éclairerons au mieux les motivations qui ont présidées à ce choix tout en évitant de produire un exposé trop technique.

2.1 Des contraintes unilatérales

Les solides qui composent un robot ne peuvent en aucun cas pénétrer dans le sol : ils doivent donc tous rester au-dessus du sol, c'est à dire avoir une altitude supérieure ou égale à l'altitude de celui-ci (figure 2.1). Ceci se traduit par un ensemble d'inégalités portant sur les positions des différents points du robot, ce que l'on peut exprimer par autant d'inégalités portant sur le vecteur q (section 1.2) :

$$\varphi_n(q) \geq 0$$

Considérons maintenant l'ensemble des points du robot qui sont en contact avec le sol à un instant t, et indiquons les par une $*$. Puisque ces points sont posés sur le sol, leur altitude est

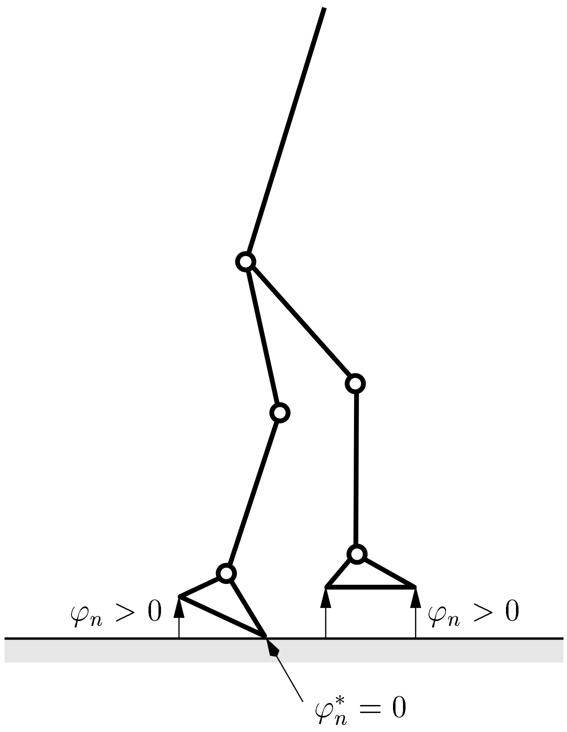


FIG. 2.1: *Les solides qui composent un robot doivent tous rester au-dessus du sol, c'est à dire avoir une altitude supérieure ou égale à l'altitude de celui-ci.*

égale à celle du sol (figure 2.1), et nous pouvons écrire :

$$\varphi_n^*(q) = 0 \tag{2.1}$$

φ_n^* représente ainsi l'ensemble des contraintes actives à l'instant t. De ces points, aucun ne peut avoir pénétré dans le sol, ni avant, ni après l'instant t : la vitesse et l'accélération du système à cet instant doivent donc être dirigées de façon à ne pas provoquer de pénétration. Les relations permettant de s'en assurer peuvent être obtenues par dérivations successives de φ_n^* :

$$C_n(q)\,\dot{q} = 0 \tag{2.2}$$

$$C_n(q)\,\ddot{q} + s_n(q, \dot{q}) \geq 0 \tag{2.3}$$

avec $C_n(q) = \partial\varphi_n^*/\partial q$ la matrice jacobienne de φ_n^* et $s_n(q, \dot{q})$ les autres termes apparaissant lors de la dérivation (nous avons travaillé ici dans le cadre d'une dynamique deux fois différentiable, ce qui n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons dans la section 2.7).

Remarquons que les points posés sur le sol ne peuvent plus descendre, mais peuvent remonter à tout moment : les contraintes de non-pénétration agissent ainsi dans un sens des déplacements, mais pas dans l'autre, ce qui justifie leur appellation de *contraintes unilatérales*.

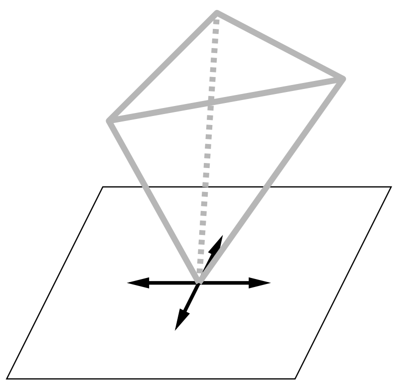


FIG. 2.2: *Lorsque des points du robot sont posés sur le sol et qu'ils glissent dessus, c'est qu'ils se déplacent dans des directions parallèles à celui-ci.*

2.2 Lorsque le robot ne glisse pas

Lorsqu'un robot est en contact avec le sol, il peut éventuellement glisser dessus, mais des forces de frottement entrent alors en jeu, qui s'y opposent. Nous modéliserons les frottements et les glissements en détail dans la section 2.4, et nous présentons ici uniquement le cas où le robot ne glisse pas sur le sol.

Lorsque des points du robot sont posés sur le sol et qu'ils glissent dessus, c'est qu'ils se déplacent dans des directions parallèles à celui-ci (figure 2.2). A l'opposé, s'ils ne glissent pas, c'est que leurs déplacements dans ces directions sont nuls. Ceci se traduit par un ensemble de contraintes portant sur les positions de ces points, ce que l'on peut exprimer par autant de contraintes portant sur le vecteur q (section 1.2) :

$$\varphi_t^*(q) = 0 \tag{2.4}$$

Il en découle également un ensemble de contraintes sur la vitesse et l'accélération du système, que nous obtenons par dérivations successives :

$$C_t(q)\,\dot{q} = 0 \tag{2.5}$$

$$C_t(q)\,\ddot{q} + s_t(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.6}$$

avec $C_t(q) = \partial\varphi_t^*/\partial q$ le jacobien des contraintes de non-glissement et $s_t(q,\dot{q})$ les autres termes apparaissant lors de la dérivation.

2.3 La dynamique qui en résulte

Ainsi, dans le cas où le robot est en contact avec le sol et qu'il ne glisse pas, un ensemble de contraintes s'exercent sur ses mouvements. Nous avons alors à déterminer la dynamique du système soumis à ces contraintes, ce qui rentre à nouveau dans le domaine d'application du principe de moindre déviation [38]. Ayant précédemment pris en compte les contraintes générées par les articulations, nous avons établi que ce principe pouvait prendre la forme du Problème Quadratique strictement convexe (1.10), auquel nous devons adjoindre maintenant les contraintes linéaires (2.3) et (2.6) :

$$\begin{cases} \min_{\ddot{q}} \ \dfrac{1}{2}\,\ddot{q}^T M(q)\,\ddot{q} + \ddot{q}^T [N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) - T(q)\,u] \\ C_n(q)\,\ddot{q} + s_n(q,\dot{q}) \geq 0 \\ C_t(q)\,\ddot{q} + s_t(q,\dot{q}) = 0 \end{cases}$$

Pour ce problème, les conditions d'optimalité sont celles de Kuhn-Tucker [20], ce qui permet une formulation de la dynamique contrainte en cinq parties :

$$M(q)\,\ddot{q} + N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) = T(q)\,u + C_n(q)^T \lambda_n + C_t(q)^T \lambda_t \tag{2.7}$$

$$C_n(q)\,\ddot{q} + s_n(q,\dot{q}) \geq 0 \tag{2.8}$$

$$C_t(q)\,\ddot{q} + s_t(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\lambda_n \geq 0 \tag{2.10}$$

$$\lambda_n^T\,[C_n(q)\,\ddot{q} + s_n(q,\dot{q})] = 0 \tag{2.11}$$

Par rapport à la dynamique (1.9), on peut observer ici l'apparition d'efforts de la forme $C_n(q)^T\lambda_n$ et $C_t(q)^T\lambda_t$, générés respectivement par les contraintes de non-pénétration et celles de non-glissement. En étudiant la puissance développée par ces efforts, on peut montrer qu'ils correspondent à un ensemble de forces s'exerçant sur chaque point posé sur le sol, respectivement orthogonales et parallèles au sol (d'où les appellations de forces normales et tangentielles et les indices $_n$ et $_t$).

Les multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_t traduisent l'amplitude de ces efforts, et puisque le vecteur λ_n ne peut avoir de termes négatifs (2.10), les forces «de non-pénétration» ne peuvent être dirigées de façon à retenir le robot au sol. Ce fait, beaucoup plus remarquable qu'il n'y paraît (son origine se trouve dans le lemme de Farkas [20]), est une particularité des contraintes unilatérales.

Les conditions (2.8) et (2.9) ne font que reprendre les contraintes (2.3) et (2.6), et la relation de complémentarité (2.11) précise enfin que lorsqu'un contact k se rompt (lorsque $C_{nk}(q)\,\ddot{q} + s_{nk}(q,\dot{q}) > 0$), la force normale correspondante λ_{nk} doit être nulle. De tels instants formant par essence un ensemble de mesure nulle, cette relation n'a strictement aucune influence sur la dynamique du système et nous la négligerons par la suite.

Notons que lorsque les contraintes (2.3) et (2.6) ne sont pas toutes indépendantes, les multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_t peuvent ne pas être définis de façon unique, mais la solution du Problème Quadratique, et donc la dynamique du système, reste définie de façon unique.

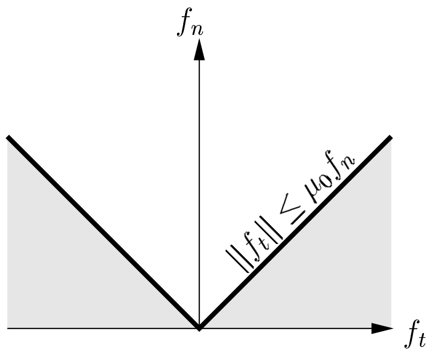


FIG. 2.3: *Selon le modèle de frottements secs d'Amontons-Coulomb, les forces de frottements ne peuvent prendre leurs valeurs que dans le cône* $\|f_t\| \leq \mu_0 f_n$.

2.4 Le modèle de frottements d'Amontons-Coulomb

Ainsi, un ensemble de forces normales s'opposent à toute pénétration dans le sol tandis qu'un ensemble de forces tangentielles s'opposent aux glissements. Mais selon le modèle de frottements secs d'Amontons-Coulomb, lorsqu'un contact entre deux objets est soumis à une force normale f_n, la force de frottement tangentielle f_t ne peut prendre ses valeurs que dans le cône de frottement :

$$\|f_t\| \leq \mu_0 f_n \tag{2.12}$$

Le coefficient de friction μ_0 étant une constante dépendant principalement du type de matériaux en contact (figure 2.3). Les forces de frottements sont donc limitées et peuvent ne pas être suffisantes pour empêcher le glissement des surfaces en contact. Dans ce cas, les solides glissent l'un sur l'autre avec une vitesse relative v, et le modèle d'Amontons-Coulomb spécifie que la force de frottement s'exerce dans la direction directement opposée à la direction de glissement, avec une intensité maximale dans les limites du cône de frottement :

$$f_t = -\mu_0 f_n \frac{v}{\|v\|} \tag{2.13}$$

2.5 Lorsque le robot se met à glisser

Du fait des glissements qui peuvent survenir à tout instant, le système n'est plus simplement soumis à un ensemble de contraintes immuables, et sa dynamique ne peut plus être obtenue par application directe du principe de moindre déviation. Le calcul de cette dynamique apparaît comme techniquement plus difficile, aboutissant à la formulation d'un Problème de Complémentarité Non-Linéaire [22, 44].

Mais la principale difficulté concernant ce modèle dynamique réside dans les nombreuses inconsistances qu'il introduit : le Problème de Complémentarité qui décrit ce modèle peut ne pas avoir de solutions ou au contraire en avoir plus d'une (l'annexe A présente un exemple de ces inconsistances). Chacun de ces cas correspond en fait à un comportement physique particulier, nécessitant une modélisation à part : ces inconsistances ne sont donc que le reflet de l'incomplétude du modèle. Le problème est que le traitement de ces cas particuliers fait toujours l'objet d'interrogations et de recherches actives [10, 19, 22].

Remarquons toutefois que la dynamique du système sans glissements (2.7)-(2.10) ne présente pas de tels problèmes : c'est l'apparition des glissements qui introduit des inconsistances. Aussi, puisque le comportement normal du robot a lieu sans glissements, nous éviterons toutes ces complications, et nous nous contenterons de la dynamique (2.7)-(2.10), sachant que celle-ci ne reste valable que tant que le robot ne glisse pas, c'est à dire tant que les forces de contact restent à l'intérieur du cône de frottement.

2.6 Résumons-nous

Afin de vérifier que les forces de contact restent bien à l'intérieur du cône de frottement, réexprimons l'inégalité (2.12) directement en fonction des multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_t. Pour peu que les contraintes φ_n^* et φ_t^* soient exprimées dans des unités homogènes, ceci aboutit en fait à une formulation inchangée :

$$\|\lambda_{tk}\| \leq \mu_0 \lambda_{nk} \tag{2.14}$$

pour chaque point k en contact avec le sol. Remarquons que ces inégalités impliquent nécessairement les inégalités (2.10) qui n'ont alors plus lieu d'être précisées. En rassemblant ces inégalités sous la forme $\mathcal{A}(\lambda) \geq 0$ et en introduisant une notation condensée :

$$C(q) = \begin{bmatrix} C_n(q) \\ C_t(q) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t \end{bmatrix}$$

on peut résumer la dynamique (2.7)-(2.10) en prenant en compte les cônes de frottement (2.14) de la façon suivante :

$$M(q)\,\ddot{q} + N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) = T(q)\,u + C(q)^T\lambda \tag{2.15}$$

$$C_n(q)\,\ddot{q} + s_n(q,\dot{q}) \geq 0 \tag{2.16}$$

$$C_t(q)\,\ddot{q} + s_t(q,\dot{q}) = 0 \tag{2.17}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) \geq 0 \tag{2.18}$$

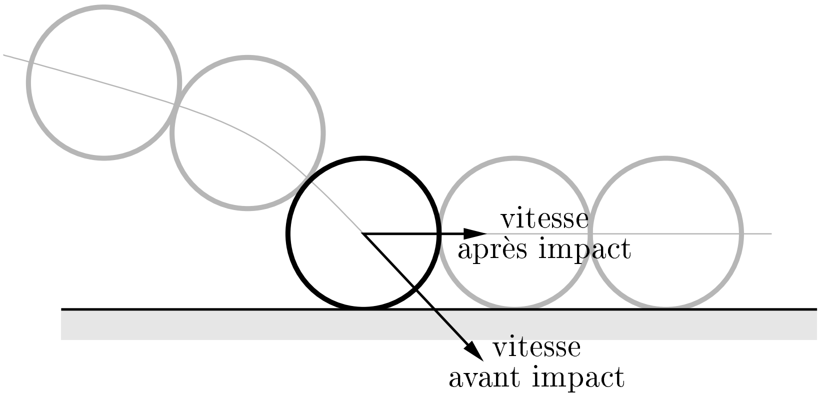


FIG. 2.4: *Lorsqu'un solide rentre en contact avec le sol, le fait qu'il ne puisse en aucun cas pénétrer dedans peut nécessiter que sa vitesse soit instantanément déviée, ce qui traduit un impact du solide sur le sol.*

2.7 Les impacts

Lorsqu'un solide rentre en contact avec le sol, le fait qu'il ne puisse en aucun cas pénétrer dedans peut nécessiter que sa vitesse soit instantanément déviée, ce qui traduit un *impact* du solide sur le sol (figure 2.4).

Lorsqu'une vitesse subit ainsi une variation instantanée, l'accélération correspondante ne peut plus être définie au sens classique, et ne peut l'être qu'au sens des distributions. Ainsi, si l'on note $\dot{q}_-$ et $\dot{q}_+$ les vitesses du robot juste avant et juste après l'impact, l'accélération peut s'écrire :

$$\ddot{q} = \{\ddot{q}\} + (\dot{q}_+ - \dot{q}_-)\,\delta$$

avec $\{\ddot{q}\}$ la dérivée classique définie en dehors de l'instant d'impact et δ une impulsion de Dirac présente à l'instant de l'impact. En l'absence de commande impulsionnelle, les seuls autres termes de la dynamique (2.7) pouvant présenter une impulsion sont les forces de contact avec le sol λ_n et λ_t :

$$\lambda_n = \{\lambda_n\} + \Lambda_n\,\delta$$

$$\lambda_t = \{\lambda_t\} + \Lambda_t\,\delta$$

Λ_n et Λ_t représentant l'amplitude des forces impulsionnelles. En remplaçant ces nouvelles définitions dans la dynamique (2.7), on peut en extraire la partie impulsionnelle présente au moment de l'impact et l'on obtient la dynamique impulsionnelle du système :

$$M(q)\,(\dot{q}_+ - \dot{q}_-) = C_n(q)^T\Lambda_n + C_t(q)^T\Lambda_t \tag{2.19}$$

reliant la discontinuité de la vitesse aux forces impulsionnelles normales et tangentielles qui en sont à l'origine. Il est généralement admis que ces forces impulsionnelles suivent les même lois de frottements / glissements (2.12)-(2.13) que les forces continues [44]. Mais les inconsistances qui en résultent se révèlent être même plus nombreuses et plus ardues à considérer que dans le cas de la dynamique continue [10, 22].

Afin d'éviter les complications qui en découlent, nous allons procéder comme pour la dynamique continue, et nous allons prendre en compte le comportement normal du robot et nous limiter à ce cas particulier. Ainsi, nous considérerons qu'aucun point en contact avec le sol ne se met à glisser suite à l'impact, ce qui implique une contrainte identique à (2.5) :

$$C_t(q)\,\dot{q}_+ = 0 \tag{2.20}$$

De plus, la semelle du robot est étudiée pour absorber les chocs et ne pas provoquer de rebonds (produisant ce que l'on appelle des impacts plastiques). En simplifiant un peu, nous considérerons qu'aucun des points en contact avec le sol ne décolle des suites de l'impact. La contrainte qui en résulte sur la vitesse post-impact est alors identique à la contrainte (2.2) :

$$C_n(q)\,\dot{q}_+ = 0 \tag{2.21}$$

L'ensemble de ces trois équations permet de spécifier le comportement impulsionnel que le robot devrait subir, la validité des simplifications étant assurée tant que les forces impulsionnelles restent dans les limites :

$$\mathcal{A}(\Lambda) \geq 0 \tag{2.22}$$

Notons que, à l'opposé de certains auteurs qui placent les impacts au centre de leur analyse des robots marcheurs [25, 30, 31], il nous semble que ceux-ci, à défaut de pouvoir être complètement évités, devraient du moins être minimisés le plus possible, dans le souci principalement de soulager la structure mécanique du robot. Nous reviendrons plus amplement sur ce point dans la deuxième partie de cette thèse, consacrée à la commande des robots marcheurs.

2.8 D'autres modèles de contact et de frottements

Le modèle de contacts avec frottements que nous venons de développer, à base de contraintes unilatérales et de frottements secs, présente un inconvénient de taille du fait des inconsistances que nous avons évoquées. Une alternative réside dans la classe des modèles compliants [49], qui se focalisent sur la déformation des objets aux environs des points de contact, exprimant cette déformation à travers des systèmes de ressorts et d'amortisseurs.

Ces modèles de déformations ne provoquent pas de discontinuités en vitesse et ne génèrent pas d'inconsistances, mais ils mettent en jeu des dynamiques dont l'échelle de temps peut être excessivement brêve. Une dynamique si rapide entraîne une sensibilité numérique accrue, nécessitant des temps de calcul élevés tout en provoquant une perte de précision sur le comportement à long terme du système. Ainsi, Baraff note [7] : *Although the penalty method is useful in some contexts (namely largely static environments) it has become increasingly apparent that the performance of spring-and-damper systems for simulating rigid body motion is inefficient and has unpredictable accuracy in dynamic settings.* La dynamique des déformations se révèle ainsi encombrante pour la simulation, elle est surtout handicapante pour la génération de lois de commande.

De nombreux autres modèles de frottement existent également [49], mais ils ne diffèrent en général du modèle d'Amontons-Coulomb que lorsqu'il y a glissement, ce que nous ne prenons de toute façon pas en compte. De plus, ils ont tendance à introduire des dynamiques qui se prêtent au même type de remarques que précédemment, se révélant finalement plutôt encombrants.

Ainsi, malgré ses inconsistances, le modèle que nous avons développé a le mérite de se prêter pleinement à la simulation et à la génération de lois de commande, comme nous le verrons par la suite. D'autres particularités renforcent le choix de ce modèle, elles sont amplement analysées et de façon détaillée dans l'article de synthèse [12], dont nous ne pouvons que recommander la lecture!

Annexe A

L'exemple de Painlevé

Dans cette annexe, nous présentons un exemple des inconsistances que nous avons évoquées dans la section 2.5. Considérons donc un système simple mais connu pour concentrer un ensemble de difficultés, l'exemple de Painlevé : soit une barre de longueur $2l$ et de masse m homogène pouvant se déplacer dans le plan (figure A.1). Avec (x, y) la position de son centre de masse (au milieu de la barre) et θ l'angle qu'elle fait avec l'horizontale, la position de son extrémité e s'écrit :

$$\begin{cases} x_e = x - l\cos\theta \\ y_e = y - l\sin\theta \end{cases}$$

Lorsque cette extrémité est en contact avec le sol, la contrainte de non-pénétration nous donne :

$$\ddot{y}_e = \ddot{y} - l\,\ddot{\theta}\cos\theta + l\,\dot{\theta}^2\sin\theta \geq 0$$

Or la dynamique de ce système s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_t \\ m\ddot{y} = -mg + f_n \\ \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = l\sin\theta f_t - l\cos\theta f_n \end{cases}$$

avec f_n et f_t les forces normale et tangentielle exercées par le sol sur l'extrémité e. La contrainte de non-pénétration nous donne alors :

$$-g + \frac{f_n}{m} - \frac{3}{m}(\sin\theta f_t - \cos\theta f_n)\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta \geq 0$$

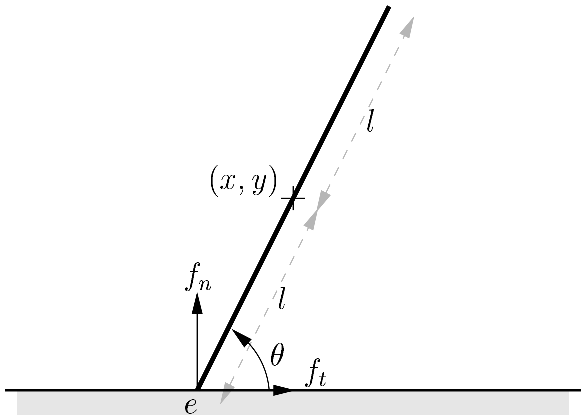


FIG. A.1: *Le problème de Painlevé : une barre homogène glissant sur le sol.*

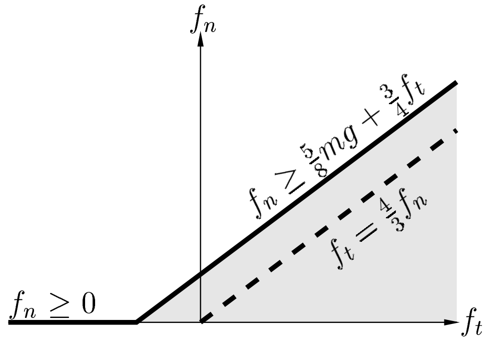


FIG. A.2: *Calcul des forces de contact avec le sol pour le problème de Painlevé.*

Considérons maintenant ce système avec l'extrémité e posée sur le sol selon un angle $\theta = \arctan 2$ (tel que $\sin\theta = 2\sqrt{5}/5$ et $\cos\theta = \sqrt{5}/5$) et glissant en translation vers la gauche (avec $\dot{x} < 0$, $\dot{y} = 0$, $\dot{\theta} = 0$). Dans ces conditions, la contrainte de non-pénétration dans le sol nous donne :

$$f_n \geq \frac{5}{8}mg + \frac{3}{4}f_t \tag{A.1}$$

Si les forces de contact avec le sol (f_t, f_n) se trouvaient dans la partie grisée de la figure A.2, il y aurait donc pénétration dans le sol. Or la barre glisse sur la gauche, et le modèle de frottement d'Amontons-Coulomb spécifie que les forces de contact doivent vérifier :

$$f_t = \mu_0 f_n \tag{A.2}$$

Nous voyons sur la figure A.2 que dès que le coefficient de friction μ_0 devient supérieur ou égal à $4/3$ (ce qui est tout à fait envisageable), les forces de contact (en pointillés) se trouvent toujours dans la partie grisée.

Notre modèle interdit la pénétration des solides d'une part, et la provoque d'autre part : il n'y a pas de solution, et nous sommes confrontés à une inconsistance du modèle. Notons que conformément à ce que nous avons précisé dans la section 2.5, l'inconsistance apparaît ici du fait que la barre glisse sur le sol, et que dans ce cas le modèle de frottement spécifie une forme bien précise des forces de contact (A.2). Il ne faudrait toutefois pas en déduire que ce modèle de frottement n'est pas adéquat, car dès que le coefficient de frottement devient suffisamment élevé, n'importe quel modèle de frottement peut devenir incompabible avec la contrainte de non-pénétration (A.1) : cette inconsistance apparaît comme inévitable dans le cadre d'un modèle de contact rigide avec frottements.

Devant un tel exemple, les tenants des modèles compliants (section 2.8) font valoir que leurs modèles n'impliquent aucunement de telles inconsistances. Les tenants des modèles rigides leur rétorquent alors que nous faisons face ici à un comportement dynamique à part, et que la validité de leurs modèles reste à prouver pour ce cas à part. Nous avons en effet évoqué dans la section 2.5 que chaque inconsistance traduit l'apparition d'un phénomène physique nécessitant un traitement à part. Dans le cas que nous venons de détailler, on suppose que l'incompatibilité donne lieu à un impact sans collision [22], ce qui pourrait donner naissance à un comportement dynamique similaire à celui d'une craie crissant sur un tableau.

Remarquons enfin que pour ce qui est de cette simple barre glissant sur le sol, on peut montrer [22] qu'aucune inconsistance ne survient tant que le coefficient de friction reste inférieur à 4/3, mais pour des systèmes mécaniques plus complexes tels qu'un robot marcheur, il est plus difficile de préciser dans quelles conditions on peut être assurés de ne pas rencontrer de telles inconsistances.

Chapitre 3

Les mouvements qu'un robot peut réaliser

A partir d'une analyse des efforts que peuvent produire les moteurs d'un robot, nous sommes amenés à introduire dans ce chapitre une distinction entre ses changements de posture, ses déplacements et ses rotations. Nous montrons alors que non seulement le robot a besoin de prendre appui sur le sol pour se déplacer, mais qu'en plus cet appui n'est possible que sous certaines conditions. Les mouvements du robot sont ainsi soumis à une série de limitations, et nous verrons qu'elles pèsent fortement sur son équilibre.

3.1 Les efforts produits par les moteurs

Un robot est composé en partie d'un assemblage de moteurs et de systèmes de transmission dans le but de produire un ensemble de couples τ sur chacune de ses articulations. Afin de pouvoir préciser l'effet de ces couples sur la dynamique du robot, reprenons la description de la position du robot que nous avons entrepris dans la section 1.2, et considérons séparément un vecteur q_1 constitué des positions articulaires, et un vecteur q_2 décrivant la position et l'orientation d'un de ses solides. Le vecteur q, qui décrit la position du robot, rassemble ces deux vecteurs et présente donc la structure suivante :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Les couples τ étant exercés sur les articulations du robot, la puissance qu'ils développent peut être exprimée à partir des vitesses articulaires $\dot{q}_1$:

$$\dot{E}_m = \dot{q}_1^T \tau$$

Or, si l'on considère les efforts généralisés $\mathcal{F}_\tau$ correspondants à ces couples, la puissance que développent les moteurs peut également s'écrire (section 1.5) :

$$\dot{E}_m = \dot{q}^T \mathcal{F}_\tau$$

Au regard de la structure (3.1) du vecteur q, ces deux équations permettent d'établir la forme des efforts généralisés :

$$\mathcal{F}_\tau = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui met en évidence le fait que les moteurs agissent sur une partie seulement de la position du robot. Plus précicément, en agissant sur les articulations du robot, c'est sur sa posture qu'ils agissent (section 1.2).

3.2 Changements de posture, déplacements et rotations

Cette formulation des efforts moteurs s'insère dans la dynamique (2.15) de la façon suivante :

$$M(q)\,\ddot{q} + N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + C(q)^T \lambda \tag{3.2}$$

Or, on montre dans l'annexe B que si l'on découpe chacun des éléments de cette dynamique selon le même schéma que les efforts moteurs, on obtient une structure :

$$\begin{bmatrix} M_1(q) \\ M_2(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} N_1(q,\dot{q}) \\ N_2(q,\dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(q)^T \\ C_2(q)^T \end{bmatrix} \lambda \tag{3.3}$$

dont la deuxième partie est composée d'une équation de Newton et d'une équation d'Euler qui mettent respectivement en jeu l'accélération du centre de masse du robot et son moment dynamique de rotation. Reprenons alors les notions de posture, d'emplacement et d'orientation présentées dans la section 1.2, et considérons les mouvements correspondants, *changements de posture*, *déplacements* et *rotations*.

L'équation de Newton montre ainsi que les déplacements du robot sont exclusivement influencés par la gravité et par les forces de contact. En particulier, ces déplacements apparaissent indépendants des changements de posture et des rotations du robot. L'équation d'Euler, pour sa part, fait apparaître de façon indissociable les rotations et les changements de posture du robot(annexe B), et nous allons voir quelles en sont les conséquences.

FIG. 3.1: *Dès qu'un robot possède un point d'appui, chacun de ses changements de posture est en mesure de produire un déplacement, et réciproquement.*

3.3 Aux origines de la marche

Ainsi, c'est uniquement par l'intermédiaire des forces de contact, en prenant appui sur le sol, que le robot peut être en mesure d'influer sur ses déplacements (problème que les astronautes connaissent bien).

Ces forces de contact sont la manifestation des contraintes (2.1)-(2.6) qui s'exercent sur les mouvements d'un robot dès qu'il est en contact avec le sol. Ces contraintes établissent en fait une corrélation entre les changements de posture et les déplacements du robot [24] : dès qu'un robot possède un point d'appui, chacun de ses changements de posture est en mesure de produire un déplacement, et réciproquement (figure 3.1). Le robot ayant la faculté d'agir sur sa posture grâce à ses moteurs, ceci lui donne la possibilité d'agir par la même occasion sur ses déplacements.

Ceci-dit, si le robot est continuellement soumis à un même jeu de contraintes (2.1) et (2.4), il ne peut se déplacer que de façon limitée : s'il garde un pied toujours posé au même endroit (un «pied de pivot» au basket-ball, par exemple), il ne peut se déplacer que dans un petit rayon autour de ce pied. Pour pouvoir se déplacer plus amplement, le robot doit alors renouveler ses appuis, renouvelant par la même occasion les contraintes (2.1) et (2.4) (voir [50] pour une discussion sur la dynamique des systèmes soumis à de telles contraintes périodiquement remises à jour). Nous voyons ainsi comment un comportement de marche (section 0.3) se met en place par voie de nécessité, nécessité de prendre appui sur le sol pour se déplacer, et nécessité de renouveler ses appuis lorsque le déplacement a lieu.

En ce qui concerne les rotations du robot, nous avons vu qu'elles ne sont pas indépendantes de ses changements de posture : le robot peut tourner sur lui-même sans forcément prendre appui sur le sol s'il effectue les mouvements adéquats [24]. Ce sont des mouvements que les astronautes apprennent à réaliser et que les chats utilisent pour toujours retomber sur leur pattes, mais ce ne sont pas des mouvements qui apparaissent dans le cadre d'un comportement de marche normal, aussi considérerons-nous que le robot a également besoin de prendre appui sur le sol pour pouvoir tourner.

3.4 Les mouvements qu'un robot peut réaliser

Non seulement un robot ne peut se déplacer ou tourner sur lui-même qu'en prenant appui sur le sol, mais en plus un tel appui n'est possible que dans certaines limites : les contraintes (2.1)-(2.6) ne sont en effet valables que pour des forces de contact satisfaisant certaines conditions (section 2.6). Les mouvements du robot subissent alors une double restriction, devant satisfaire d'une part la deuxième partie de la dynamique (3.3), et d'autre part les inégalités (2.18) :

$$\begin{cases} M_2(q)\,\ddot{q} + N_2(q,\dot{q})\,\dot{q} + G_2(q) = C_2(q)^T\lambda \\ \mathcal{A}(\lambda) \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Si l'on suppose par ailleurs que la première partie de la dynamique (3.3) peut toujours être réalisée grâce aux couples moteurs, ces contraintes représentent la principale limitation des mouvements du robot, et c'est sur elles que nous allons nous concentrer par la suite.

On peut remarquer que ces contraintes, qui portent sur les déplacements et les rotations mais pas sur les changements de posture, sont au cœur de la plupart des arts martiaux : l'aïkido, en particulier, s'est fait une spécialité de ne pas lutter contre les mouvements de l'adversaire mais d'utiliser à bon escient les lois physiques qui les gouvernent. On peut aussi relever l'importance des appuis dans des sports comme le judo ou la boxe.

3.5 Le ZMP

L'analyse que nous venons de mener peut être appliquée à n'importe quel robot marcheur, mais plus un robot possède de points de contact avec le sol, moins il risque de subir ces restrictions. Beaucoup plus que les robots quadrupèdes, hexapodes ou octopodes, ce sont donc les robots bipèdes qui y sont particulièrement sensibles. Toutes les recherches menées sur la dynamique et la commande des robots bipèdes se sont ainsi trouvées confrontées à ces contraintes, qui ont alors été étudiées de diverses façons.

L'analyse la plus populaire qui en ait été faite [25, 27, 28, 29, 42, 45, 53, 58, 59, 60, 61] est celle qui repose sur le calcul du Zero Moment Point. Ce ZMP n'est autre que le centre de pression des forces de contact, et il se calcule donc à partir du torseur des forces de contact $C_2(q)^T\lambda$, qui est lui même obtenu à partir du torseur dynamique du robot $M_2(q)\,\ddot{q} + N_2(q,\dot{q})\,\dot{q}$ et de la gravité $G_2(q)$. La contrainte sur les mouvements du robot s'exprime alors par le fait que ce ZMP doit rester à l'intérieur du polygone de sustentation. Si l'on n'oublie pas d'exprimer par ailleurs les conditions de non-glissement, on obtient une formulation équivalente aux contraintes (3.4).

Mais ce ZMP n'est défini, et le critère du polygone de sustentation n'est valide, que si tous les points de contact sont sur un même plan. Cette analyse n'est donc plus valable dès que le robot monte ou descend une marche ou dès qu'il prend appui sur des plans d'inclinaisons différentes : elle n'est valable que si le robot se déplace indéfiniment sur un même plan, ce qui est évidemment plutôt réducteur. Certaines généralisations de ce calcul ont bien été proposées [28], mais elles sont douteuses et ne disposent d'aucunes justifications.

Certaines analyses [21, 23] se concentrent alors sur les forces de contact et décrivent précisément leurs limitations, l'une introduisant même la structure (3.3) de la dynamique. Mais ces analyses n'identifient pas les différentes composantes des mouvements d'un robot, et ne peuvent donc établir la nécessité des forces de contact pour pouvoir se déplacer. Une analyse [41], à l'opposé, décompose très précisément la structure des mouvements d'un robot et la nécessité d'interagir avec l'environnement, mais ne fait pas apparaître les limitations des forces de contact. L'étude que nous venons de mener propose donc une synthèse de ces diverses analyses.

Annexe B

Structure de la dynamique d'un robot

Dans cette annexe, nous analysons de quelle façon la dynamique d'un robot répercute la structure du vecteur q qui décrit sa position. Nous développons tout d'abord la structure que cette dynamique fait apparaître, pour ensuite en analyser une partie avec plus de finesse.

B.1 Un peu de découpage

La position et l'orientation de chaque solide faisant partie du robot peuvent être exprimées en fonction du vecteur q, et de même, leurs vitesses peuvent être exprimées en fonction du vecteur $\dot{q}$. Or ce vecteur fait référence à des informations d'origines différentes, consignant d'une part l'ensemble des vitesses articulaires $\dot{q}_1$, et faisant état d'autre part de la vitesse $\dot{q}_2$ de l'un de ces solides. Reprenons alors les formules (1.2) dans lesquelles nous avons exprimé les vitesses des solides en fonction du vecteur $\dot{q}$ et découpons les jacobiens qui y apparaissent afin de distinguer l'influence de $\dot{q}_1$ de celle de $\dot{q}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \begin{bmatrix} J_{tk1} & J_{tk2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \omega_k &= \begin{bmatrix} J_{Rk1} & J_{Rk2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ces jacobiens que nous venons de découper sont les briques fondamentales des formules (1.4)-(1.6) qui définissent chacun des éléments de la dynamique du robot. En précisant alors dans ces définitions le découpage des termes J_{tk}^T et J_{Rk}^T, on fait apparaître des structures :

$$M(q) = \sum_k \begin{bmatrix} J_{tk1}^T\, m_k\, J_{tk} + J_{Rk1}^T\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk} \\ J_{tk2}^T\, m_k\, J_{tk} + J_{Rk2}^T\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(q) \\ M_2(q) \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

$$N(q,\dot q) = \sum_k \begin{bmatrix} J_{tk1}^T\, m_k\, \dot J_{tk} + J_{Rk1}^T\, \mathbb{I}_k\, \dot J_{Rk} - J_{Rk1}^T\, (\widetilde{\mathbb{I}_k J_{Rk}\, \dot q})\, J_{Rk} \\ J_{tk2}^T\, m_k\, \dot J_{tk} + J_{Rk2}^T\, \mathbb{I}_k\, \dot J_{Rk} - J_{Rk2}^T\, (\widetilde{\mathbb{I}_k J_{Rk}\, \dot q})\, J_{Rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(q,\dot q) \\ N_2(q,\dot q) \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$\mathcal{F} = \sum_k \begin{bmatrix} J_{tk1}^T\, f_k + J_{Rk1}^T\, \tau_k \\ J_{tk2}^T\, f_k + J_{Rk2}^T\, \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

qui reprennent la structure (3.1) du vecteur q, la dynamique (1.7) se réécrivant alors :

$$\begin{bmatrix} M_1(q) \\ M_2(q) \end{bmatrix} \ddot q + \begin{bmatrix} N_1(q,\dot q) \\ N_2(q,\dot q) \end{bmatrix} \dot q = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

B.2 Des équations de Newton-Euler

Les positions articulaires q_1 déterminent la disposition des différents solides du robot les uns par rapport aux autres, et de même, les vitesses articulaires $\dot q_1$ déterminent leurs vitesses les uns par rapport aux autres. Il suffit alors de connaître la vitesse $\dot q_2 = (\dot x_0, \dot\theta_0)$ de l'un de ces solides par rapport à l'environnement du robot pour en déduire les vitesses de tous les autres.

Les vecteurs q_1 et $\dot q_1$ nous permettent en effet d'établir les vitesses $\hat{\dot x}_k$ et $\hat\omega_k$ du solide k par rapport au solide de référence, et il faut alors les mettre en relation avec les vitesses $\dot x_0$ et ω_0 du solide de référence par rapport à l'environnement du robot, pour obtenir finalement les vitesses $\dot x_k$ et ω_k du solide k par rapport à l'environnement du robot. Les formules de composition des vitesses qui permettent de réaliser ce calcul s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot x_k &= \dot x_0 + (R_0\, \omega_0) \times (x_k - x_0) + R_0\, \hat{\dot x}_k \\ R_k\, \omega_k &= R_0\, \omega_0 + R_k\, \hat\omega_k \end{aligned}$$

Rappelons que les vitesses de rotation instantanée sont exprimées dans des repères liés aux solides, d'où les multiplications par R_0 et R_k, qui sont les rotations décrivant respectivement l'orientation du solide de référence et celle du solide k. La vitesse de rotation instantanée ω_0 du solide de référence peut être directement reliée à sa vitesse angulaire $\dot\theta_0$:

$$\omega_0 = J_{R0}\, \dot\theta_0$$

de sorte que l'on peut réexprimer les vitesses $\dot{x}_k$ et ω_k en faisant apparaître précisément l'influence du vecteur $\dot{q}_2$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_k &= \dot{x}_0 - (\widetilde{x_k - x_0})\, R_0\, J_{R0}\, \dot{\theta}_0 + R_0\, \hat{\dot{x}}_k \\
\omega_k &= R_k^T R_0\, J_{R0}\, \dot{\theta}_0 + \hat{\omega}_k
\end{aligned}$$

où la matrice antisymétrique $(\widetilde{x_k - x_0})$ représente le produit vectoriel par $x_k - x_0$. En rappelant que $\hat{\dot{x}}_k$ et $\hat{\omega}_k$ sont fonctions de q_1 et de $\dot{q}_1$, ces expressions permettent de préciser la forme des jacobiens J_{tk2} et J_{Rk2} que nous avons introduits dans les formules (B.1). Si l'on considère en particulier la structure du vecteur $\dot{q}_2$:

$$\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

on aboutit à un découpage :

$$\begin{aligned}
J_{tk2} &= \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{3\times 3} & -(\widetilde{x_k - x_0})\, R_0\, J_{R0} \end{bmatrix} \\
J_{Rk2} &= \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{3\times 3} & R_k^T\, R_0\, J_{R0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où $\mathbb{0}_{3\times 3}$ est une matrice nulle et $\mathbb{1}_{3\times 3}$ une matrice identité. On peut alors procéder comme dans la section précédente et préciser le découpage des termes J_{tk2}^T et J_{Rk2}^T dans les définitions (B.2) et (B.3), faisant apparaître les structures :

$$\begin{aligned}
M_2(q) &= \sum_k \begin{bmatrix} m_k\, J_{tk} \\ J_{R0}^T\, R_0^T \left((\widetilde{x_k - x_0})\, m_k\, J_{tk} + R_k\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk} \right) \end{bmatrix} \\
N_2(q, \dot{q}) &= \sum_k \begin{bmatrix} m_k\, \dot{J}_{tk} \\ J_{R0}^T\, R_0^T \left((\widetilde{x_k - x_0})\, m_k\, \dot{J}_{tk} + R_k\, \mathbb{I}_k\, \dot{J}_{Rk} - R_k\, (\widetilde{\mathbb{I}_k J_{Rk}\, \dot{q}})\, J_{Rk} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En reprenant les formules (1.2) et (1.3), l'élément $M_2(q)\, \ddot{q} + N_2(q, \dot{q})\, \dot{q}$ de la dynamique (B.5) fait apparaître un terme :

$$\sum_k m_k \ddot{x}_k = m\, \ddot{x}_G$$

où m est la masse totale du robot et x_G la position de son centre de masse, ainsi qu'un terme :

$$J_{R0}^T\, R_0^T \sum_k (x_k - x_0) \times m_k \ddot{x}_k + R_k\, \mathbb{I}_k\, \dot{\omega}_k - R_k\, (\widetilde{\mathbb{I}_k\, \omega_k})\, \omega_k$$

qui, en mettant de côté la multiplication par $J_{R0}^T\, R_0^T$, n'est autre que le moment dynamique de rotation de l'ensemble du robot exprimé par rapport à x_0 dans un repère absolu. Pour ce qui est des efforts généralisés, la définition (B.4) nous donne :

$$\mathcal{F}_2 = \sum_k \left[\begin{array}{l} f_k \\ J_{R0}^T\, R_0^T \left(\widetilde{(x_k - x_0)}\, f_k + R_k\, \tau_k \right) \end{array} \right]$$

ce qui, en mettant de côté la multiplication par $J_{R0}^T\, R_0^T$, fait apparaître la somme des forces et la somme des couples qui sont exercés sur l'ensemble du robot, les couples étant exprimés par rapport à x_0 dans un repère absolu.

Ainsi, la seconde partie de la dynamique (B.5) établit d'une part une égalité entre le moment d'accélération du centre de masse du robot et la somme des forces exercées, et d'autre part une égalité entre son moment dynamique de rotation et la somme des couples exercés. On retrouve alors des équations de Newton-Euler (section 1.1), mais exprimées pour le robot pris dans sa totalité.

B.3 Holonomie et non-holonomie

Remarquons que si l'on fait apparaître la position du centre de masse du robot $x_G(q)$ par l'intermédiaire d'un changement de variable, l'équation de Newton que nous venons de décrire apparaît sous sa forme triviale :

$$m\, \ddot{x}_G = \sum_k f_k$$

Cette équation étant au cœur des limitations (3.4) des mouvements du robot, un tel changement de variable permet de simplifier grandement le calcul de la commande (chapitre 5) ainsi que la génération de trajectoires réalisables.

Mais contrairement à l'équation de Newton, l'équation d'Euler n'est pas intégrable, elle est *non-holonome*. En effet, le moment dynamique de rotation qu'elle met en jeu peut être exprimé comme la dérivée d'un moment cinétique de rotation :

$$\sum_k (x_k - x_0) \times m_k \ddot{x}_k + R_k\, \mathbb{I}_k\, \dot{\omega}_k - R_k\, \widetilde{(\mathbb{I}_k\, \omega_k)}\, \omega_k = \frac{d}{dt} \left[\sum_k (x_k - x_0) \times m_k \dot{x}_k + R_k\, \mathbb{I}_k\, \omega_k \right] + m\, \dot{x}_0 \times \dot{x}_G$$

(le terme $\dot{x}_0 \times \dot{x}_G$ disparaissant si l'on exprime ces moments par rapport à x_G et non par rapport à x_0), mais ce moment cinétique ne peut pas être exprimé à son tour comme la dérivée d'une expression. Ceci a pour conséquence principale que, pour reprendre la terminologie de la section 3.2, on ne peut dissocier les rotations du robot de ses changements de posture [41]. Cela indique également que l'équation d'Euler ne peut pas être simplifiée comme peut l'être l'équation de Newton.

Deuxième partie

Commande d'un robot marcheur

Chapitre 4

Equilibre et déséquilibre

Le but de ce chapitre est d'étudier quelles sont les conditions qui président à l'équilibre ou au déséquilibre d'un robot marcheur. L'idée principale qui se dégage de ce chapitre est que s'il veut éviter de tomber, un robot peut être amené à revoir ses objectifs et à réaliser d'autres mouvements que ceux qu'il avait initialement prévu. Ainsi, en nous appuyant sur la notion de viabilité, nous présentons le fait que l'équilibre d'un robot sera d'autant mieux assuré qu'il pourra se référer à de nombreuses trajectoires différentes, des pas plus ou moins longs, plus ou moins hauts, plus ou moins rapides, des pas de côté et toutes sortes de variantes.

4.1 Quand un robot perd l'équilibre

Considérons le cas où un robot a pour objectif de rester debout, à l'arrêt, dans une position précise. Supposons qu'il se trouve dans cette position et qu'on le pousse : on provoque ainsi un déplacement qui l'écarte de son objectif. Pour revenir à sa position initiale (première ligne de la figure 4.1), le robot doit alors freiner ce déplacement puis effectuer le déplacement inverse, et pour cela, il a besoin des forces de contact (section 3.3). Mais ces forces sont limitées (section 3.4), donc les capacités de freinage du robot sont limitées, aussi, plus le robot est poussé fortement, plus le déplacement que cela induit prend de l'ampleur.

Arrive un moment où ce déplacement devient tel que les appuis du robot ne sont plus suffisants pour qu'il puisse maintenir son équilibre (seconde ligne de la figure 4.1). S'il veut éviter de tomber, le robot doit alors chercher de nouveaux appuis : il doit faire un pas (dernière ligne de la figure 4.1), pour ne revenir qu'ensuite à sa position d'origine. La situation que nous

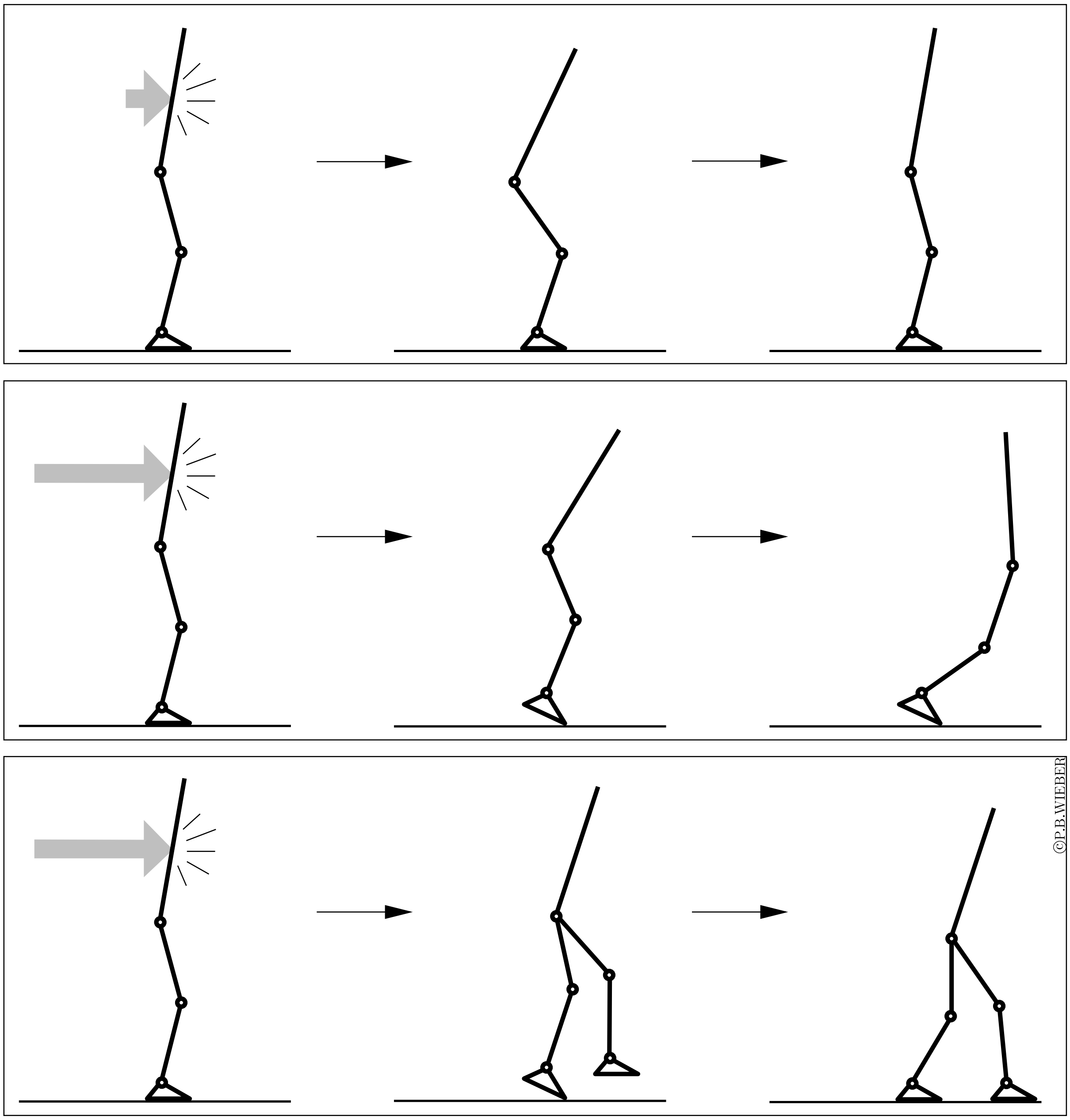


FIG. 4.1: *Plus le robot est poussé fortement, plus le déplacement que cela induit prend de l'ampleur. Arrive un moment où, s'il veut éviter de tomber, le robot doit chercher de nouveaux appuis.*

décrivons ici reprend et complète un des points soulevés dans la section 3.3 : les changements d'appuis ne sont pas seulement nécessaires pour permettre au robot de se déplacer, ils le sont aussi, et avant tout, pour des raisons d'équilibre.

Cet exemple illustre de bout en bout l'influence considérable que les limitations (3.4) peuvent avoir sur les mouvements du robot, et en particulier sur son équilibre : le robot n'est ainsi pas toujours en mesure de réaliser les mouvements prévus, et la chute peut même être inévitable dans certaines situations (dernière image de la seconde ligne de la figure 4.1).

Remarquons par ailleurs que l'état d'équilibre ou de déséquilibre du robot dépend tout autant de sa position q que de sa vitesse $\dot{q}$ (on ne peut influer sur les mouvements du robot que par l'intermédiaire de son accélération $\ddot{q}$). Pour cette raison, nous ferons dorénavant référence à l'*état* du robot $(q, \dot{q})$, qui rassemble position et vitesse.

4.2 Le noyau de viabilité

Les objectifs du robot peuvent être momentanément contrariés, tant qu'il reste debout sur ses pieds, il garde la possibilité de les réaliser ultérieurement. En fait, le seul impératif qui s'impose au robot, c'est d'éviter de tomber, car la moindre chute peut se révéler fatale tant pour la réussite de sa mission que pour le robot lui-même.

Si l'on considère l'ensemble Ω des positions du robot où l'on estime qu'il est tombé, par exemple l'ensemble des positions où une partie du robot autre que ses pieds est en contact avec le sol, le robot doit donc éviter à tout prix de se trouver dans une position $q \in \Omega$. Ceci constitue alors une condition de *viabilité* [1], et sans rentrer dans les détails théoriques [1, 2, 3], on peut en proposer la définition suivante :

Définition 1 : *Un état $(q_0, \dot{q}_0)$ est viable si, à partir de cet état, le robot est en mesure de réaliser un mouvement $q(t)$ qui ne pénètre pas dans l'ensemble Ω.*

Les états du robot forment alors deux groupes distincts : les états viables, à partir desquels le robot peut éviter de tomber, et les états non-viables, pour lesquels une chute est irrémédiable. L'ensemble des états viables constitue ce que l'on appelle le *noyau de viabilité*, l'impératif pour le robot apparaissant alors clairement : rester dans les limites de ce noyau de viabilité, toute sortie annonçant une chute irrémédiable.

On peut identifier de nombreux états viables, par exemple toute position dans laquelle le robot peut rester en équilibre à l'arrêt. On peut également identifier de nombreuses trajectoires qui restent dans le noyau de viabilité, par exemple toute trajectoire cyclique ou toute trajectoire qui se termine sur un état viable. Mais de par la complexité de la dynamique des robots marcheurs, il n'est actuellement pas possible de connaître, même approximativement, les limites du noyau de viabilité (voir la conclusion de cette thèse), c'est à dire que sauf cas particulier tel que ceux que nous venons de présenter, il n'est pas possible de savoir si un mouvement du robot ne va pas entraîner une chute irrémédiable.

4.3 Des trajectoires de référence

Concentrons nous maintenant sur une trajectoire qui reste dans les limites du noyau de viabilité, et supposons qu'elle reste à une certaine distance de ces limites : tant que les mouvements du robot restent suffisament proches de cette trajectoire, nous sommes assurés qu'ils restent par la même occasion à l'intérieur du noyau de viabilité. Mais si les mouvements du robot s'éloignent de cette trajectoire, par exemple sous l'effet d'une perturbation, on ne peut à nouveau plus savoir s'ils ne vont pas entraîner une chute irrémédiable, sauf s'ils sont suffisament proches d'une autre trajectoire identifiée comme restant dans les limites du noyau de viabilité, à une certaine distance de ces limites.

L'exemple qui débute ce chapitre traduit exactement ce cas de figure : dans la première ligne de la figure 4.1, les mouvements du robot restent suffisament proches de son objectif pour que son équilibre soit assuré. Dans la seconde ligne, le robot a été trop éloigné de son objectif, et son équilibre devient incertain. La troisième ligne montre alors que dans ce cas, le robot est en mesure d'effectuer des mouvements suffisament proches d'une autre trajectoire, en l'occurence un pas en avant, et peut du coup préserver son équilibre.

Ainsi, à défaut de pouvoir garder l'équilibre en toutes circonstances, le robot est au moins assuré de le garder tant qu'il reste suffisament proche d'une trajectoire satisfaisant les conditions précédentes. Et du fait des perturbations qu'il peut être amené à subir (figure 4.1), son équilibre sera d'autant mieux assuré qu'il aura de nombreuses trajectoires auxquelles se référer.

Notons que ne sachant pas situer les limites du noyau de viabilité, nous ne savons pas à partir de quelle distance les mouvements du robot sont suffisament proches d'une trajectoire pour que son équilibre soit assuré. Il est peut-être possible d'établir des bornes à cette distance en analysant la dynamique du robot au voisinage d'une telle trajectoire, mais nous n'avons pas approfondi la question.

4.4 Des trajectoires de marche

Nous nous intéressons tout particulièrement aux trajectoires de marche (section 0.3), mais pour en appréhender aisément le plus grand nombre possible, nous allons considérer plutôt un ensemble de constituants élémentaires, des bouts de trajectoire, qui peuvent être juxtaposés les uns aux autres de façon à composer des trajectoires de marche complètes, ces constituants étant dans notre cas des pas.

Dès lors, que ce soit pour réagir à un déséquilibre, à une configuration particulière de l'environnement, ou pour répondre à un objectif spécifique, nous sommes amenés à considérer des pas plus ou moins longs, plus ou moins hauts, plus ou moins rapides, des pas de côté et toutes sortes de variantes. Chacun de ces pas peut être caractérisé par une série de paramètres p formant deux groupes distincts : un premier groupe, longueur, hauteur, vitesse d'exécution, amplitude de l'écart de côté, précise la forme générale du mouvement tandis qu'un second groupe, emplacement, orientation et instant de départ du mouvement, permet de l'utiliser à tout moment dans l'élaboration de trajectoires de marche complètes.

En notant $q_d(t, p)$ la trajectoire correspondant à chaque jeu de paramètres, les trajectoires de marche que nous considérons sont donc du type $q_d(t, p(t))$ avec des paramètres de marche $p(t)$ constants par morceaux, constants pendant la durée de chaque pas, et réinitialisés à chaque fin de pas, de telle façon que la trajectoire résultante soit de classe C^2 par rapport au temps (sauf en cas d'impacts, bien sûr (section 2.7)).

Nous voudrions (section 0.3) que chaque trajectoire $q_d(t, p)$ induise une dépense d'énergie la plus faible possible. Ceci nous amène à rechercher des trajectoires optimales en énergie, problème qui a déjà été abordé de diverses façons dans l'étude des robots marcheurs [14, 18, 26, 48, 49]. Ces différentes approches se proposent de trouver soit des trajectoires cycliques, soit des trajectoires menant d'un point de départ à un point d'arrivée prédéfinis. Mais dans notre cas, chaque pas commence là où finit le précédent et finit là où commence le suivant : chaque trajectoire dépend donc de ses voisines, qui peuvent correspondre à des jeux de paramètres très variés. Ceci introduit un problème de génération de trajectoires tout à fait particulier, que nous avons commencé à étudier, mais seulement à un stade préliminaire [36].

D'un autre côté, il a été proposé d'utiliser des relevés biomécaniques de mouvements humains [13] ou de spécifier des mouvements a priori, sans se soucier dans les deux cas de savoir s'ils sont réalisables dans le cadre des limitations (3.4) [9, 21, 30]. Il a également été proposé de n'imposer qu'une partie des mouvements du robot, l'autre partie servant à satisfaire ces limitations [32, 45, 58, 60]. Le choix de l'un ou l'autre type de trajectoire est en fait intimement lié à la façon dont les mouvements du robot sont contrôlés, sujet que nous allons approfondir dans le prochain chapitre.

4.5 La stabilité selon Lyapunov

Le robot doit donc coordonner ses mouvements de façon à rester suffisament proche d'un ensemble d'états qui lui ont été prescrits (des trajectoires de marche, par exemple), mais nous ne savons pas quelle distance est suffisament proche. A défaut, il nous faut alors au moins considérer que s'il est suffisament proche à un moment donné, il le reste par la suite. Devant être valable quelle que soit la distance «suffisament proche», ceci nous amène à considérer que l'ensemble d'états doit être stable au sens de Lyapunov :

Définition 2 : *Un ensemble $\mathcal{S}$ est stable si, pour toute distance $\varepsilon > 0$, il existe une distance $\delta > 0$ telle que, à partir de n'importe quel état $(q_0, \dot{q}_0)$ se trouvant à une distance de $\mathcal{S}$ inférieure à δ, le robot réalise un mouvement $(q(t), \dot{q}(t))$ qui reste à une distance de $\mathcal{S}$ inférieure à ε.*

Pour le cas où il ne serait pas suffisament proche de cet ensemble, il est préférable que le robot essaie par ailleurs de constamment s'en rapprocher, c'est à dire que cet ensemble soit également attractif :

Définition 3 : *Un ensemble $\mathcal{S}$ est attractif s'il existe une distance $D > 0$ telle que, à partir* *de n'importe quel état* $(q_0, \dot{q}_0)$ *se trouvant à une distance de* $\mathcal{S}$ *inférieure à* D*, le robot réalise un mouvement* $(q(t), \dot{q}(t))$ *qui converge vers* $\mathcal{S}$ *lorsque le temps va à l'infini.*

Pour espérer rester suffisament proche d'un ensemble d'états, le robot doit donc coordonner ses mouvements de façon à rendre cet ensemble au moins stable et attractif, auquel cas on dit qu'il est *asymptotiquement stable.* Cette notion de stabilité asymptotique sera le cœur du prochain chapitre.

Chapitre 5

Réalisation d'une marche stable

Nous cherchons à établir dans ce chapitre de quelle manière un robot doit coordonner ses mouvements s'il veut de déplacer en marchant de façon stable. Une telle coordination de mouvements prend généralement la forme d'une *loi de commande*, qui détermine à chaque instant l'action que le robot doit entreprendre en fonction de l'état dans lequel il se trouve. Les résultats des chapitres précédents concernant les mouvements des robots marcheurs et les conditions de leur équilibre prennent alors toute leur valeur et permettent de proposer une loi de commande qui devrait, sous certaines conditions, assurer l'équilibre du robot même en présence de fortes perturbations.

5.1 Les principales méthodes proposées à ce jour

Commençons par passer en revue les principales méthodes qui ont été proposées à ce jour pour contrôler les mouvements d'un robot marcheur, sans être exhaustifs car notre but ici est de mettre en évidence comment les thèmes des chapitres précédents ont été abordés ou au contraire négligés, et quelle influence cela peut avoir.

Intéressons-nous tout d'abord aux événements de prise de contact et de perte de contact avec le sol : nous avons vu dans le chapitre 3 que pour se déplacer, un robot doit renouveller ses appuis et doit donc faire intervenir de tels événements, mais ils peuvent également survenir de façon impromptue. Or, étudier la stabilité d'un système mécanique en présence de tels événements est un problème difficile qui commence tout juste à être étudié dans le cas d'une seule contrainte unilatérale sans frottements [10, 11]. L'influence de tels événements sur l'équilibre d'un robot marcheur n'a donc toujours pas été étudiée à ce jour, même si certains n'ont pas négligé la question [59, 62]. Ainsi, il a toujours été supposé qu'aucune perte de contact ne survient de façon impromptue, et que les prises de contact ne perturbent pas la stabilité des mouvements du robot.

Nous avons également vu dans le chapitre 3 qu'un robot ne peut contrôler ses déplacements et ses rotations qu'en prenant appui sur le sol. En particulier, tant qu'il possède au moins trois points d'appui non-alignés, les contraintes de contact (2.1)-(2.6) sont telles que ses déplacements et ses rotations sont entièrement déterminés par ses changements de posture (la matrice $C_2(q)$ étant alors de rang 6). C'est une condition que la plupart supposent toujours remplie [9, 21, 23, 27, 28, 29, 31, 42, 58, 59, 60, 61], à l'exception de ceux qui se sont intéressés spécifiquement au sous-actionnement de systèmes de faible dimension [32, 33].

Mais nous avons vu que ces contraintes ne sont valables que pour des forces de contact satisfaisant les inégalités (2.18) : ceux qui ne se préoccupent pas de ces inégalités ne peuvent donc assurer que le robot se déplace comme prévu, et en particulier qu'il garde l'équilibre [9, 31]. Il est donc nécessaire de s'assurer en premier lieu que les mouvements prévus puissent être réalisés avec des forces de contact adéquates [23]. Lorsque ces mouvements prévus ne peuvent être réalisés, il a été proposé de réaliser au moins des mouvements qui en soient le plus proches possible [21].

Une autre approche consiste à attribuer à certaines articulations le rôle de compenser les effets dynamiques de la structure du robot et de faire en sorte que les mouvements prévus soient toujours réalisés avec des forces de contact adéquates [58, 60]. Cette compensation peut toutefois prendre beaucoup d'ampleur et peut ne pas être toujours réalisable dans les limites de débattement des articulations (voir l'amplitude des balancements dans [60]).

Mais dans toutes ces approches, le seul objectif considéré est de stabiliser asymptotiquement une unique trajectoire de référence (sans s'assurer d'ailleurs que cet objectif soit atteint, même avec les hypothèses que nous venons de présenter). Nous avons vu dans le chapitre précédent que si le robot est suffisament proche d'une trajectoire à un moment donné, une telle stabilité asymptotique permet d'assurer son équilibre par la suite. Mais nous avons vu également que s'il est éloigné de cette trajectoire, par exemple sous l'effet d'une perturbation, cet équilibre devient vite incertain. Aucune de ces approches n'est donc en mesure d'assurer l'équilibre d'un robot marcheur face à des perturbations conséquentes (figure 4.1).

En réponse à ce problème, il a été envisagé d'altérer la trajectoire de référence ou d'en changer dès qu'un déséquilibre est suspecté, mais aucune des méthodes proposées à ce jour ne relie ces changements de trajectoire à une analyse de stabilité qui pourrait, seule, assurer que l'équilibre du robot soit préservé, certaines de ces méthodes paraissant même franchement douteuses [27, 28, 29, 42]. Notons toutefois que c'est une de ces méthodes qui a abouti à la réussite incontestable que constitue le robot HONDA (figure 0.2).

Remarquons pour finir une approche originale qui consiste à ne contrôler qu'une partie des mouvements du robot et à utiliser pour le reste la dynamique «naturelle» du système dans des limites prescrites par un automate à états fini [45]. Cette approche repose sur une certaine stabilité intrinsèque à la marche, illustrée par ailleurs dans l'étude des robots passifs [33, 37].

Mais au delà de l'absence d'analyse de la stabilité de ce procédé, il reste à vérifier qu'une telle approche puisse être appliquée à la locomotion sur terrain accidenté en présence de perturbations.

Face à ce tour d'horizon, la loi de commande que nous allons proposer s'emploie en premier lieu à stabiliser asymptotiquement une trajectoire de référence $q_d(t, p(t))$, et lorsque les mouvements nécessaires à cette stabilisation ne peuvent être réalisés avec des forces de contact adéquates, nous cherchons une autre trajectoire de référence que le robot pourrait stabiliser. Mais contrairement à ce qui a été proposé jusque-là, le changement de trajectoire que nous allons considérer est construit de façon à assurer l'équilibre du robot, au moins sous certaines conditions.

5.2 Stabiliser une trajectoire de référence

Le premier objectif de notre loi de commande est donc de stabiliser asymptotiquement une trajectoire de référence $q_d(t, p(t))$, et nous supposerons pour commencer que cette trajectoire satisfait les contraintes de non-pénétration et de non-glissement présentées dans le chapitre 2. Ne sachant maîtriser la stabilité des mouvements d'un robot en présence de prises de contact et de pertes de contact, nous supposerons également qu'aucune perte de contact ne survient de façon impromptue, et que les prises de contact ne perturbent pas cette stabilité. Plus particulièrement, nous supposerons qu'après chaque prise de contact, les contraintes actives normales et tangentielles sont celles prévues par la trajectoire de référence : $\varphi^*_{n,t}(q) = \varphi^*_{n,t}(q_d) = 0$ ainsi que $C_{n,t}(q)\,\dot{q} = C_{n,t}(q_d)\,\dot{q}_d = 0$ (chapitre 2).

On ne sait donc garantir la stabilité d'une trajectoire que si le robot maintient un contact avec le sol conforme à ce que cette trajectoire prévoit, et pour assurer ce dernier point, nous avons décidé d'appliquer l'approche par fonction de tâche [51]. Introduisons alors un changement de variables $Q(q)$ qui fasse apparaître entre autres les contraintes de contact actives :

$$Q(q) = \begin{bmatrix} Q_n(q) = \varphi^*_n(q) \\ Q_t(q) = \varphi^*_t(q) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

(nous verrons un exemple complet de changement de variables dans le chapitre suivant). En éliminant au besoin les contraintes dépendantes, nous supposerons que ce changement de variables constitue un difféomorphisme de classe C^2 entre un ensemble Ω et son image $Q(\Omega)$. Nous supposerons que la position du robot se trouve toujours à l'intérieur de cet ensemble, que la trajectoire $q_d(t, p(t))$ reste toujours à l'intérieur de cet ensemble, qu'elle reste à une certaine distance des limites de cet ensemble, et qu'elle est bornée : dans ces conditions, il devient totalement indifférent de considérer la stabilité asymptotique de cette trajectoire avant ou après ce changement de variables.

En appliquant ce changement de variables, intéressons-nous à l'erreur de positionnement du robot par rapport à la trajectoire de référence et à ses dérivées successives :

$$
\begin{aligned}
e(q,t) &= Q(q) - Q_d(t,p(t)) \\
\dot{e}(q,\dot{q},t) &= H(q)\,\dot{q} - \dot{Q}_d(t,p(t)) \\
\ddot{e}(q,\dot{q},\ddot{q},t) &= H(q)\,\ddot{q} + h(q,\dot{q}) - \ddot{Q}_d(t,p(t))
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

avec $H(q) = \partial Q/\partial q$ la matrice jacobienne du changement de variables, $h(q,\dot{q})$ les autres termes apparaissant lors de la dérivation, et $Q_d(t,p(t)) = Q(q_d(t,p(t)))$. La stabilité asymptotique de la trajectoire $q_d(t,p(t))$ devient alors équivalente à celle de l'erreur $e(q,t) = 0$.

En notant $e_{n,t}(q,t)$ la partie de cette erreur qui concerne les éléments Q_n et Q_t du changement de variables (5.1), nous avons supposé qu'après chaque prise de contact, nous avons :

$$
\begin{aligned}
e_{n,t}(q,t) &= \varphi^*_{n,t}(q) - \varphi^*_{n,t}(q_d) &&= 0 \\
\dot{e}_{n,t}(q,\dot{q},t) &= C_{n,t}(q)\,\dot{q} - C_{n,t}(q_d)\,\dot{q}_d &&= 0
\end{aligned}
$$

Dans ces conditions, assurer un contact avec le sol conforme à ce que la trajectoire de référence prévoit revient à assurer que :

$$
\ddot{e}_{n,t}(q,\dot{q},\ddot{q},t) = 0 \tag{5.3}
$$

En s'appuyant sur la dynamique (3.2) du robot, l'approche par fonction de tâche consiste à faire réaliser par le robot des efforts moteurs τ calculés à partir de la formule suivante :

$$
\begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + C(q)^T\lambda = M(q)\,H(q)^{-1}\big[v - h(q,\dot{q}) + \ddot{Q}_d(t,p(t))\big] + N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) \tag{5.4}
$$

où le vecteur v reste à définir, ce qui permet d'obtenir une dynamique de l'erreur $e(q,t)$ découplée et linéarisée :

$$
\ddot{e}(q,\dot{q},\ddot{q},t) = v
$$

Ce vecteur v permet donc de contrôler directement l'évolution de l'erreur $e(q,t)$ et nous allons nous en servir pour définir la loi de commande sous la forme d'un vecteur v_*.

A priori, n'importe quelle loi de commande assurant la stabilité asymptotique de l'erreur $e(q,t)$ peut être envisagée, à commencer par un simple Proportionnel-Dérivée, et il nous faut juste assurer que les éléments du vecteur v_* qui correspondent à $\ddot{e}_{n,t}(q,\dot{q},\ddot{q},t)$ soient nuls afin que la condition (5.3) soit remplie : $v_{n,t*} = 0$. Nous verrons dans la prochaine section que certaines lois de commande sont préférables à d'autres, mais nous n'avons pas approfondi la question sachant que de manière générale, le problème de la stabilité en présence de prises de contact et de pertes de contact reste entier. En attendant de pouvoir résoudre cette difficulté, en s'inspirant peut-être de la loi de commande proposée dans [11], nous nous sommes contentés dans nos simulations d'un simple Proportionnel-Dérivée (figure 6.7).

Tant que le robot peut réaliser la loi de commande v_*, la stabilité asymptotique de la trajectoire de référence est assurée, ce qui suffit à garantir que son équilibre est préservé (chapitre précédent). Mais pour réaliser cette loi de commande, le robot a besoin de forces de contact adéquates, ce que met en évidence la deuxième de ces deux équations :

$$\begin{aligned} \tau + C_1(q)^T \lambda &= M_1(q)\, H(q)^{-1} \big[v_* - h(q,\dot q) + \ddot Q_d(t,p(t)) \big] + N_1(q,\dot q)\, \dot q + G_1(q) \quad (5.5) \\ C_2(q)^T \lambda &= M_2(q)\, H(q)^{-1} \big[v_* - h(q,\dot q) + \ddot Q_d(t,p(t)) \big] + N_2(q,\dot q)\, \dot q + G_2(q) \quad (5.6) \end{aligned}$$

obtenues en découpant la formule (5.4) selon le même schéma que la dynamique (3.3). Lorsque ces forces de contact font défaut, le robot n'est pas en mesure de réaliser la commande v_* et doit trouver un autre moyen de garder l'équilibre : nous proposons alors qu'il change de trajectoire de référence.

5.3 Changer de trajectoire de référence

Mais avant de chercher à changer de trajectoire de référence, commençons par étendre l'ensemble des trajectoires que nous pouvons envisager : considérons que les paramètres de marche $p(t)$ ne sont plus constants par morceaux mais de classe C^2 par morceaux, toujours selon le schéma présenté dans la section 4.4. De cette façon, les paramètres de marche peuvent être amenés à varier pendant la durée même d'un pas : les mouvements $Q_d(t,p(t))$ ainsi produits peuvent être très éloignés des mouvements d'origine, $Q_d(t,p)$ pour p fixé, mais ils restent toutefois exclusivement composés de «positions de marche» $Q_d(\cdot,\cdot)$.

En supposant que les trajectoires de marche $Q_d(t,p)$ sont également de classe C^2 par rapport aux paramètres p, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot Q_d(t,p,\dot p) &= J(t,p)\, \dot p + \frac{\partial Q_d}{\partial t}(t,p) \\ \ddot Q_d(t,p,\dot p,\ddot p) &= J(t,p)\, \ddot p + n(t,p,\dot p) \quad (5.7) \end{aligned}$$

avec $J(t,p) = \partial Q_d / \partial p$ la matrice jacobienne des trajectoires et $n(t,p,\dot p)$ les autres termes apparaissant lors de la dérivation. En reportant la définition (5.7) dans l'équation (5.6), on obtient :

$$C_2(q)^T \lambda = M_2(q)\, H(q)^{-1} \big[v_* + J(t,p)\, \ddot p + n(t,p,\dot p) - h(q,\dot q) \big] + N_2(q,\dot q)\, \dot q + G_2(q) \quad (5.8)$$

où l'on voit que les mouvements du robot, et donc les forces de contact nécessaires à leur réalisation, dépendent de la loi de commande v_*, mais aussi de l'évolution des paramètres de marche, par l'intermédiaire du terme $\ddot p$, tout particulièrement. On peut alors envisager de modifier $\ddot p$, changeant alors de trajectoire de référence, pour faire en sorte que la loi de commande v_* soit toujours réalisable avec des forces de contact adéquates. De cette façon, la stabilité asymptotique de l'erreur $e(q,t)$ continue à être assurée, ce qui garantit que le robot converge in fine vers une trajectoire de marche $Q_d(t,p'(t))$, peut être autre que celle initialement prévue, mais qui préserve son équilibre.

Mais un tel changement de trajectoire de référence n'est pas toujours possible : tout d'abord, le répertoire de trajectoires de marche a ses limites, les paramètres de marche $p(t)$ étant limités à un ensemble $\mathcal{P}$. La présence d'obstacles ou d'accidents de terrain peut même restreindre ces paramètres à un sous-ensemble $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, et l'évolution des paramètres de marche doit impérativement avoir lieu dans ces limites. De plus, il se peut que parmi les trajectoires dont dispose le robot, aucune ne permette la compensation nécessaire, c'est à dire que la matrice $M_2(q)\,H(q)^{-1}J(t,p)$ peut ne pas avoir la constitution adéquate. Et puis la trajectoire de référence doit satisfaire les contraintes de non-pénétration et de non-glissement, en particulier :

$$\ddot{Q}_{nd}(t,p,\dot{p},\ddot{p}) \;=\; J_n(t,p)\,\ddot{p} + n_n(t,p,\dot{p}) \;\geq\; 0 \tag{5.9}$$

$$\ddot{Q}_{td}(t,p,\dot{p},\ddot{p}) \;=\; J_t(t,p)\,\ddot{p} + n_t(t,p,\dot{p}) \;=\; 0 \tag{5.10}$$

ce qui restreint d'autant l'ensemble des trajectoires envisageables (les indice $_n$ et $_t$ font référence aux éléments Q_n et Q_t du changement de variables (5.1)).

Si changer de trajectoire de référence permet de compenser les faiblesses de la stabilisation, c'est donc une solution qui a ses limites, et il est préférable de ne s'en servir qu'en dernier recours. C'est à dire qu'il est préférable d'envisager dès le départ une loi de commande v_* qui soit bien adaptée au problème, et surtout des trajectoires de références, à commencer par les trajectoires d'origine, $Q_d(t,p)$ pour p fixé, qui soient stabilisables, ce qui nécessite déjà qu'elles soient réalisables dans le cadre des limitations (3.4). Or nous avons vu dans la section 4.4 qu'obtenir un tel ensemble de trajectoires n'est pas immédiat, ce qui a finalement été une des raisons principales pour lesquelles cette loi de commande n'a pu être testée, même en simulation.

5.4 Une loi de commande

Selon les forces de contact qui sont disponibles à chaque instant, l'équation (5.8) laisse une certaine liberté dans l'évolution des paramètres de marche $p(t)$, ce qui peut être mis à profit pour répondre au mieux aux divers objectifs du robot.

Le robot peut par exemple avoir identifié une trajectoire souhaitée $Q_d(t,p_d(t))$ et chercher à mettre en œuvre une évolution des paramètres de marche $\ddot{p}$ qui soit la plus proche possible de :

$$\ddot{p}_\times = \ddot{p}_d(t) - k_p(p - p_d(t)) - k_v(\dot{p} - \dot{p}_d(t))$$

afin de se rapprocher autant que possible de cette trajectoire souhaitée. La figure 4.1 illustre par exemple le cas d'une trajectoire souhaitée immobile, et donc d'une évolution souhaitée des paramètres de marche $\ddot{p}_\times = 0$. Mais en cas de forte perturbation, l'équation (5.8) peut ne plus permettre cette évolution souhaitée des paramètres de marche et imposer $\ddot{p} \neq 0$.

La loi de commande qui a été esquissée dans les sections précédentes peut alors être récapitulée de la façon suivante :

- commencer par évaluer l'évolution souhaitée des paramètres de marche $\ddot{p}_\times$ ainsi que la loi de commande v_* qui assure la stabilité asymptotique de l'erreur $e(q,t)$,

- déterminer ensuite l'évolution des paramètres de marche $\ddot{p}_*$ qui soit la plus proche possible de l'évolution souhaitée $\ddot{p}_\times$ tout en permettant la réalisation de la loi de commande v_* avec des forces de contact λ_* adéquates, ce qui nous amène à résoudre le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min\limits_{\ddot{p},\,\lambda} \ \|\ddot{p} - \ddot{p}_\times\|^2 \\ C_2(q)^T \lambda = M_2(q)\, H(q)^{-1} \big[v_* + J(t,p)\, \ddot{p} + n(t,p,\dot{p}) - h(q,\dot{q}) \big] + N_2(q,\dot{q})\, \dot{q} + G_2(q) \\ J_n(t,p)\, \ddot{p} + n_n(t,p,\dot{p}) \geq 0 \\ J_t(t,p)\, \ddot{p} + n_t(t,p,\dot{p}) = 0 \\ \mathcal{A}(\lambda) \geq 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

  qui reprend successivement les équations (5.8), (5.9)-(5.10) et les inégalités (2.18),

- calculer enfin les efforts moteurs τ nécessaires pour réaliser la commande v_*, avec une évolution des paramètres de marche $\ddot{p}_*$ et en présence de forces de contact λ_*, à partir de l'équation (5.5) :

$$\tau = M_1(q)\, H(q)^{-1} \big[v_* + J(t,p)\, \ddot{p}_* + n(t,p,\dot{p}) - h(q,\dot{q}) \big] + N_1(q,\dot{q})\, \dot{q} + G_1(q) - C_1(q)^T \lambda_*$$

  Dans le cas du robot BIP, les consignes à envoyer aux moteurs se déduisent directement :

$$u = T_1(q)^{-1}\, \tau$$

  où $T_1(q)$ est une matrice carrée inversible représentant les caractéristiques électromécaniques des moteurs et des transmissions (chapitre 7).

Lorsque le problème d'optimisation (5.11) n'a pas de solution, c'est que la commande v_* ne peut pas être réalisée, même en mettant à contribution la totalité du répertoire de trajectoires de marche. Une solution de secours consiste alors à procéder comme dans [21] et à réaliser une commande v qui soit le plus proche possible de v_* en espérant que la stabilité du robot sera préservée.

5.5 Quelques simplifications

Le temps nécessaire pour le calcul d'une loi de commande détermine la fréquence à laquelle on peut l'échantillonner, ce qui peut avoir une influence décisive sur ses performances : toute simplification de ce calcul est donc à même d'avoir une influence bénéfique sur l'équilibre du robot.

Une première simplification que l'on peut envisager concerne la formule (5.6) : nous avons vu dans l'annexe B qu'elle est composée d'une équation de Newton et d'une équation d'Euler, l'équation de Newton prenant une forme triviale si l'on fait apparaître la position du centre de masse du robot $x_G(q)$. Supposons alors que l'on puisse compléter le changement de variables (5.1) et faire apparaître la position de ce centre de masse :

$$Q(q) = \begin{bmatrix} Q_n(q) = \varphi_n^*(q) \\ Q_t(q) = \varphi_t^*(q) \\ Q_G(q) = x_G(q) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ainsi, en désolidarisant l'équation de Newton de celle d'Euler et en leur associant respectivement les indices $_{2N}$ et $_{2E}$, la formule (5.6) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} C_{2N}(q)^T \lambda &= m\left[v_{G*} + \ddot{Q}_{Gd}(t, p(t))\right] + G_{2N}(q) \\ C_{2E}(q)^T \lambda &= M_{2E}(q)\, H(q)^{-1}\left[v_* - h(q,\dot{q}) + \ddot{Q}_d(t, p(t))\right] + N_{2E}(q,\dot{q})\,\dot{q} + G_{2E}(q) \end{aligned}$$

où m est la masse totale du robot. On économise ainsi un peu de calcul matriciel, sachant que l'équation d'Euler, de son côté, ne se prête malheureusement pas à une telle simplification (annexe B).

Une autre simplification concerne les inégalités $\mathcal{A}(\lambda) \geq 0$, qui font apparaître des contraintes côniques, ce qui nécessite des algorithmes de résolution spécifiques. On peut alors envisager une approximation polyédrique du cône de frottement, ce qui fait apparaître à la place une série de contraintes linéaires. Dans ce cas, le problème d'optimisation (5.11) prend la forme d'un Problème Quadratique classique, qui peut se résoudre simplement et rapidement. En considérant par exemple une pyramide octogonale inscrite dans les limites du cône de frottement, on aboutit aux inégalités :

$$A\,\lambda = \begin{bmatrix} \alpha\mu_0\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \alpha\mu_0\mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \alpha\mu_0\mathbb{1} & \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \alpha\mu_0\mathbb{1} & \mathbb{0} & -\mathbb{1} \\ \beta\mu_0\mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \beta\mu_0\mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \beta\mu_0\mathbb{1} & \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \beta\mu_0\mathbb{1} & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_t \\ \lambda_{t'} \end{bmatrix} \geq 0$$

avec $\alpha = \beta/\sqrt{2}$, $\beta = 1/\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\mathbb{0}$ une matrice nulle, $\mathbb{1}$ une matrice identité, et λ_t et $\lambda_{t'}$ les multiplicateurs de Lagrange relatifs à chacune des directions de contact (figure 2.2).

Troisième partie

Le robot BIP

Chapitre 6

Le modèle dynamique du robot BIP

Le calcul d'un modèle de robot est un problème classique que de nombreux outils tels que Symoro [34] ou Robotica [40] permettent de résoudre. Mais le modèle du robot BIP comporte 21 degrés de libertés, ce qui nous amène très loin des robots manipulateurs habituels qui en comptent rarement plus de 6, et la taille du modèle généré, ainsi que le temps de calcul et les besoins en mémoire explosent rapidement si les algorithmes employés ne sont pas adaptés. En reprenant le travail préalable de Frank Génot [22], nous avons donc développé une application spécifique qui s'appuie sur les capacités de calcul symbolique du logiciel Maple, et nous avons généré le modèle du robot BIP à l'aide des paramètres fournis par Philippe Sardain [52].

Ce chapitre présente ainsi les différentes méthodes que nous avons utilisé, sans rentrer dans des détails qui peuvent être trouvés dans de nombreux ouvrages [15, 39, 55]. Nous présentons ensuite quelques résultats qui ont été obtenus grâce à ce modèle, tant en simulation qu'en application réelle sur le robot.

6.1 La cinématique du robot

Nous avons vu dans la section 1.2 que pour décrire la position d'un robot, c'est à dire pour déterminer la position et l'orientation de chacun des solides qui le composent, il suffit d'un vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ précisant d'une part la position et l'orientation de l'un d'eux et d'autre part l'ensemble des positions articulaires. Or c'est pas moins de 15 articulations qui animent le robot BIP (figure 6.1), donc 15 variables articulaires qu'il faut répertorier, auxquelles il faut ajouter les 6 variables nécessaires pour préciser la position et l'orientation d'un solide.

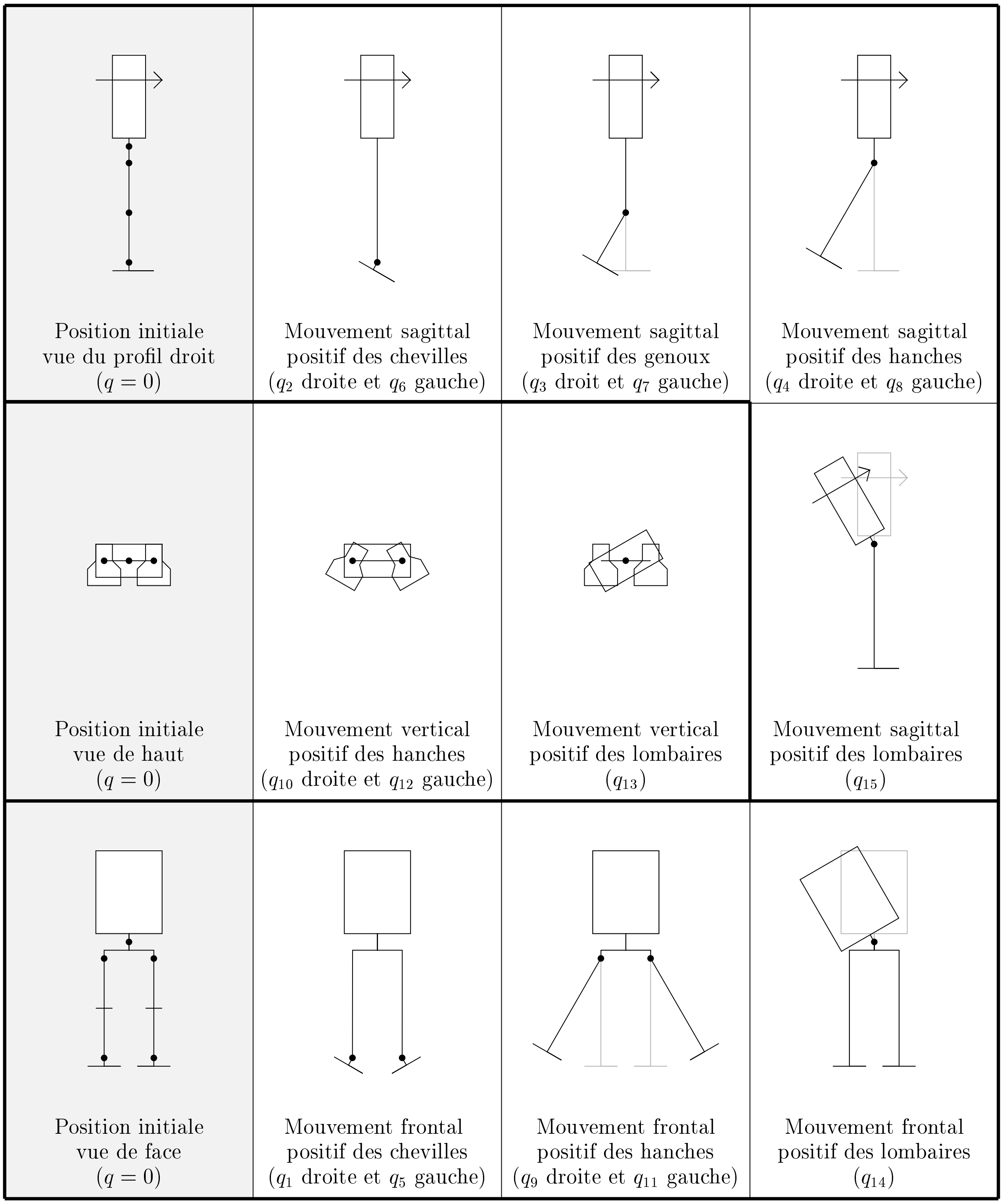


FIG. 6.1: *Position initiale et sens des déplacements de chacune des 15 articulations du robot BIP classées selon la direction qui les caractérise (sagittale, frontale, verticale).*

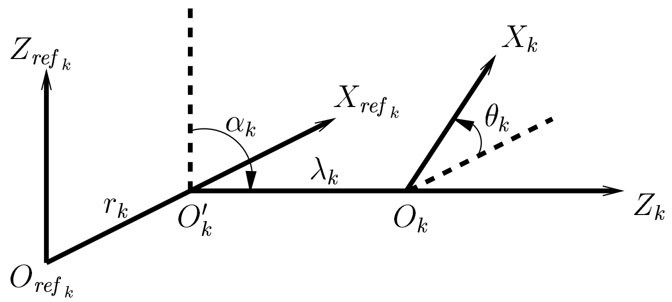


FIG. 6.2: *Le paramétrage de Khalil-Kleinfinger décrit le passage du repère ref_k au repère k en effectuant une translation r_k et une rotation α_k le long de l'axe X_{ref_k}, puis une translation λ_k et une rotation θ_k le long de l'axe Z_k.*

Ce sont donc $15 + 6 = 21$ variables que précise le vecteur q (figure 1.2), à partir desquelles nous devons déterminer la position et l'orientation de chacun des solides du robot.

Pour cela, nous avons utilisé la notation développée par Denavit et Hartenberg puis modifiée par Khalil et Kleinfinger [35]. Nous avons donc attaché un repère (O_k, X_k, Y_k, Z_k) à chaque solide k, puis nous avons parcouru l'ensemble de la structure en décrivant la position et l'orientation du repère k à partir du repère précédent ref_k en effectuant une translation r_k et une rotation α_k le long de l'axe X_{ref_k}, puis une translation λ_k et une rotation θ_k le long de l'axe Z_k (figure 6.2). Ainsi, la matrice qui permet de passer d'un repère à l'autre prend la forme (en coordonnées homogènes) :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0 & r_k \\ \cos\alpha_k \sin\theta_k & \cos\alpha_k \cos\theta_k & -\sin\alpha_k & -\lambda_k \sin\alpha_k \\ \sin\alpha_k \sin\theta_k & \sin\alpha_k \cos\theta_k & \cos\alpha_k & \lambda_k \cos\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors de préciser chacun des paramètres r_k, α_k, λ_k et θ_k en fonction de la géométrie des différents solides et en fonction de chacune des 21 variables du vecteur q. La figure 6.4 présente ainsi un extrait du fichier qui précise ces paramètres pour le robot BIP.

Remarquons que dans cette description de la géométrie du robot, le solide dont la position et l'orientation sont précisées par le vecteur q_2 est le pied droit. Le repère qui est attaché à ce solide est positionné comme indiqué dans la figure 6.3, sa position étant exprimée directement par le vecteur `base` tandis que son orientation est représentée par des rotations successives autour des axes Y, puis X, puis Z, introduites par l'intermédiaire des repères 18 à 20.

C'est en répétant cette procédure de passage d'un repère au suivant que l'on peut calculer la position et l'orientation de chacun des solides qui composent le robot, déduisant en particulier la position de leurs centres de masse, des points qui sont en contact avec le sol, de certains points caractéristiques (figure 6.6) que nous appelons des tags, puis les jacobiens et les hessiens correspondants (tableau 6.1).

FIG. 6.3: *Le solide dont la position et l'orientation sont précisées par le vecteur q_2 est le pied droit (le repère (O, X, Y, Z) a une origine O située au milieu de l'orteil).*

```
# Coordonnées de l'origine du repère de référence
base := vector([q[16], q[17], q[18]]):

# Repère 1 : pied droit
ref_1     := 20:
r_1       := 0:
lambda_1  := 0:
alpha_1   := 0:
theta_1   := Pi/2:

# Repère 2 : cardan droit
ref_2     := 1:
r_2       := 0.083:
lambda_2  := -0.170:
alpha_2   := Pi/2:
theta_2   := q[1]:

# Repère 3 : tibia droit
ref_3     := 2:
r_3       := 0:
lambda_3  := 0:
alpha_3   := -Pi/2:
theta_3   := q[2]:

# Repère 4 : cuisse droite
ref_4     := 3:
r_4       := 0.410:
lambda_4  := 0:
alpha_4   := 0:
theta_4   := q[3]:

# Repère 5 : levier hanche droite
ref_5     := 4:
r_5       := 0.410:
lambda_5  := 0:
alpha_5   := 0:
theta_5   := Pi/2+q[4]:
.
.
.
```

```
.
.
.
# Repère 16 : cardan armoire
ref_16    := 15:
r_16      := 0:
lambda_16 := 0:
alpha_16  := Pi/2:
theta_16  := Pi/2+q[14]:

# Repère 17 : support armoire + armoire
ref_17    := 16:
r_17      := 0:
lambda_17 := 0:
alpha_17  := -Pi/2:
theta_17  := q[15]:

# Repère 18 : rotation Y du repère de référence
ref_18    := 0:
r_18      := 0:
lambda_18 := 0:
alpha_18  := -Pi/2:
theta_18  := Pi/2+q[20]:

# Repère 19 : rotation X du repère de référence
ref_19    := 18:
r_19      := 0:
lambda_19 := 0:
alpha_19  := Pi/2:
theta_19  := Pi/2+q[19]:

# Repère 20 : rotation Z du repère de référence
ref_20    := 19:
r_20      := 0:
lambda_20 := 0:
alpha_20  := -Pi/2:
theta_20  := -Pi/2+q[21]:
```

FIG. 6.4: *Extrait du fichier déterminant la position du robot BIP en fonction du vecteur q, par l'intermédiaire de paramètres de Khalil-Kleinfinger.*

matrice_passage(k)	matrice de passage du repère k vers le repère ref_k
matrice_repere(k)	matrice de passage du repère k vers le repère d'origine
coord_cdm(k)	coordonnées du centre de masse du solide k (repère d'origine)
coord_cdm_robot()	coordonnées du centre de masse du robot
vecteur_gravite()	$G(q)$, vecteur des effets gravitationnels
jac_rotation(k)	$J_{Rk}(q)$, jacobien de rotation du solide k
mat_huygens(G)	moment d'inertie d'une masse de 1 kg positionnée au point G (pour le théorème de Huygens)
matrice_inertie()	$M(q)$, matrice d'inertie du robot
matrice_coriolis()	$N(q, \dot{q})$, matrice des effets centrifuges, gyroscopiques et Coriolis
coord_tag(k)	coordonnées du tag k dans le repère d'origine
matrice_tag()	matrice réunissant les coordonnées de l'ensemble des tags ainsi que celles du centre de masse du robot
matrice_contact()	matrice réunissant les coordonnées des points de contact utilisée pour générer les contraintes $\varphi(q)$
jacobien_contact()	$C(q)$, jacobien des coordonnées des points de contact
hessiens_contact()	$s(q, \dot{q})$, terme apparaissant lors de la seconde dérivation des coordonnées des points de contact

TAB. 6.1: *Ensemble des procédures de l'application robotdyn2000 permettant de générer le modèle dynamique du robot BIP.*

6.2 La dynamique du robot

Nous présentons ici très succinctement comment les procédures évoquées dans le tableau 6.1 permettent de générer chacun des éléments de la dynamique du robot. Nous avons vu au cours des chapitres 1 et 2 que la dynamique du robot prend la forme (2.15) :

$$M(q)\,\ddot{q} + N(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) = T(q)\,u + C(q)^T\lambda$$

Pour calculer la matrice d'inertie $M(q)$, nous faisons usage de la formule (1.4) :

$$M(q) = \sum_k J_{tk}(q)^T\, m_k\, J_{tk}(q) + J_{Rk}(q)^T\, \mathbb{I}_k\, J_{Rk}(q)$$

dans laquelle les jacobiens de translation et de rotation, $J_{tk}(q)$ et $J_{Rk}(q)$, sont obtenus pas des méthodes classiques [39, 55]. Notons que les matrices d'inertie $\mathbb{I}_k$ sont exprimées ici par rapport aux centres de masse, alors que le document [52] les exprime par rapport aux origines des repères, d'où l'application du théorème de Huygens (tableau 6.1).

Pour calculer la matrice des effets non-linéaires $N(q,\dot{q})$, nous n'employons pas la formule (1.5), préférant appliquer les symboles de Christoffel du premier type sur la matrice d'inertie :

$$N_{kj} = \sum_i \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i$$

ce qui est plus simple à mettre en œuvre, au prix peut-être d'une moins bonne efficacité algorithmique. Le vecteur gravité $G(q)$ dérive pour sa part de l'énergie potentielle du système (section 1.5), et celle-ci est déduite de la position du centre de masse du robot. En ce qui concerne le jacobien $C(q)$, il est directement issu de la cinématique du robot, et nous verrons en détail dans le chapitre suivant d'où provient la matrice d'actionnement $T(q)$.

6.3 Les premières expériences réalisées avec le robot

Ce modèle dynamique s'est révélé nécessaire dès les premières expériences réalisées avec le robot, qui ont consisté à le faire tenir debout en équilibre sur un pied [5], et à lui faire prendre différentes postures, pour lesquelles la compensation de la gravité était indispensable. La figure 6.5 montre deux exemples de telles postures, qui ont été obtenues en fixant la position d'un pied en l'air puis en cherchant la posture qui nécessite le moins d'efforts articulaires pour tenir à l'arrêt, ce qui nous a amené à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{q,\,u,\,\lambda}\ u^2 \\ G(q) = T(q)\,u + C(q)^T\lambda \\ \varphi^*(q) = 0 \\ \mathcal{A}(\lambda) \geq 0 \\ h(q) = 0 \end{cases}$$

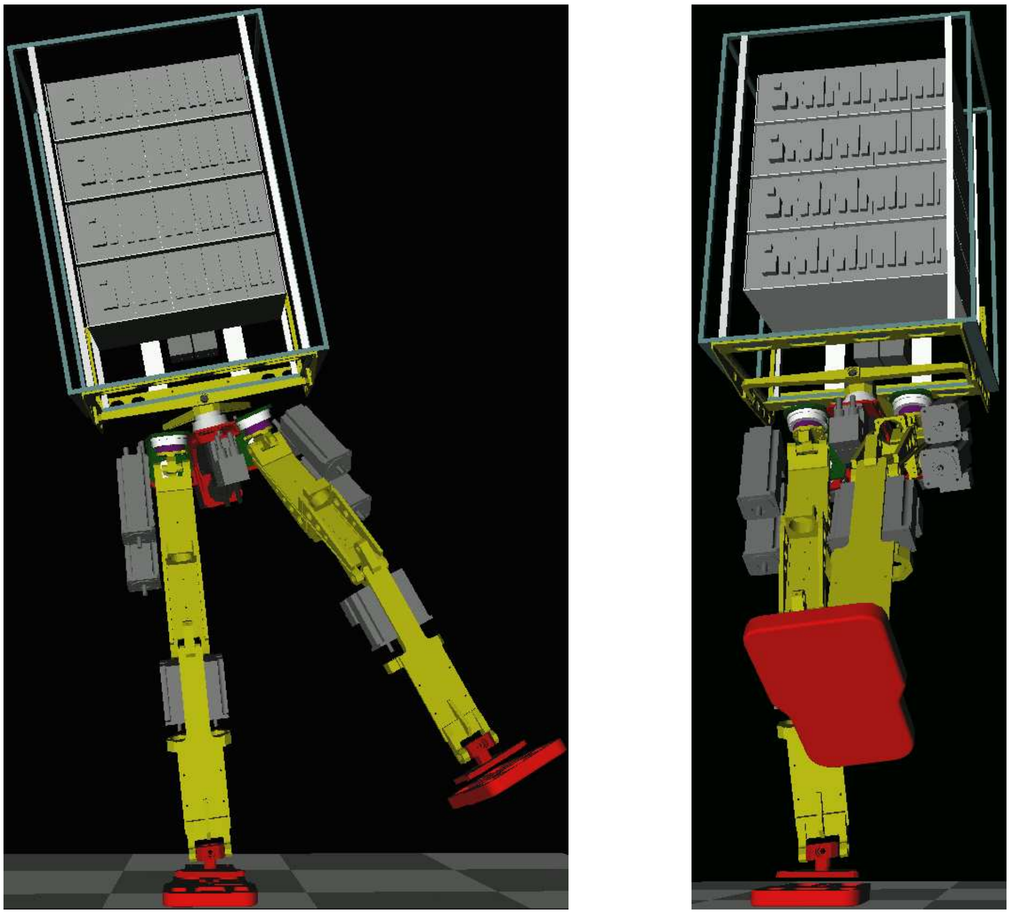


FIG. 6.5: *Deux exemples de postures qui ont été réalisées par le robot BIP.*

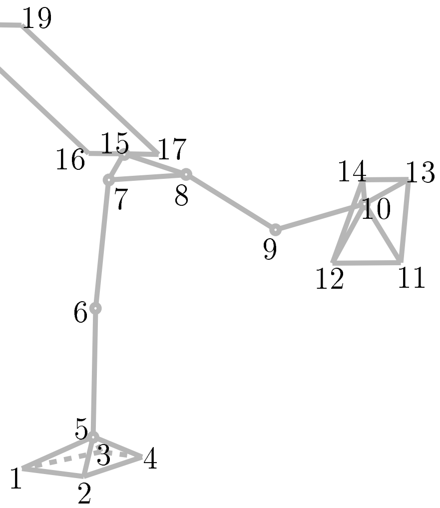


FIG. 6.6: *Quelques points caractéristiques.*

$Q_{1\ldots3}$	$\{x_G,\, y_G,\, z_G\}$	position du centre de masse du robot
$Q_{4\ldots6}$	$\{x_5,\, y_5,\, z_5\}$	position de la cheville droite
$Q_{7\ldots9}$	$\{x_{10},\, y_{10},\, z_{10}\}$	position de la cheville gauche
$Q_{10\ldots12}$	$\{y_{17}-y_{16},\, x_{17}-x_{16},\, x_{18}-x_{16}\}$	orientation du tronc
$Q_{13\ldots15}$	$\{y_1-y_2,\, x_1-x_2,\, y_4-y_2\}$	orientation du pied droit
$Q_{16\ldots18}$	$\{y_{11}-y_{12},\, x_{11}-x_{12},\, y_{14}-y_{12}\}$	orientation du pied gauche
$Q_{19\ldots21}$	$q_{13\ldots15}$	

TAB. 6.2: *Définition d'un changement de variables.*

où $h(q)$ est une contrainte fixant la position d'un pied en l'air.

6.4 Un exemple de changement de variables

La loi de commande que nous avons présenté dans le chapitre précédent commence par introduire un changement de variables devant constituer un difféomorphisme de classe C^2. Cette condition est difficile à maîtriser et nécessite de faire appel à la connaissance que nous avons a priori du système. Mais surtout, ce changement de variables doit faire apparaître les contraintes de contact actives $\varphi^*(q)$.

Le tableau 6.2 présente un exemple de changement de variables défini à partir de la position de quelques points caractéristiques (figure 6.6) que l'on a pu utiliser en simulation dans diverses configurations de simple et de double supports, mais toujours avec le ou les pieds bien à plat sur le sol. En effet, les éléments $Q_{4\ldots6}$ et $Q_{13\ldots15}$ de ce changement de variables représentent la position et l'orientation du pied droit, qui participent d'un bloc aux contraintes de contact actives lorsque celui-ci est posé bien à plat sur le sol, les éléments $Q_{7\ldots9}$ et $Q_{16\ldots18}$ remplissant le même rôle pour le pied gauche.

La figure 6.7 présente ainsi le résultat d'une simulation de la loi de commande présentée dans la section 5.2 qui utilise ce changement de variables : le mouvement réalisé consiste en un transfert d'appui du pied droit vers le pied gauche et retour avec un léger déhanchement, les segments rouges symbolisant les forces de contact qui sont à l'œuvre.

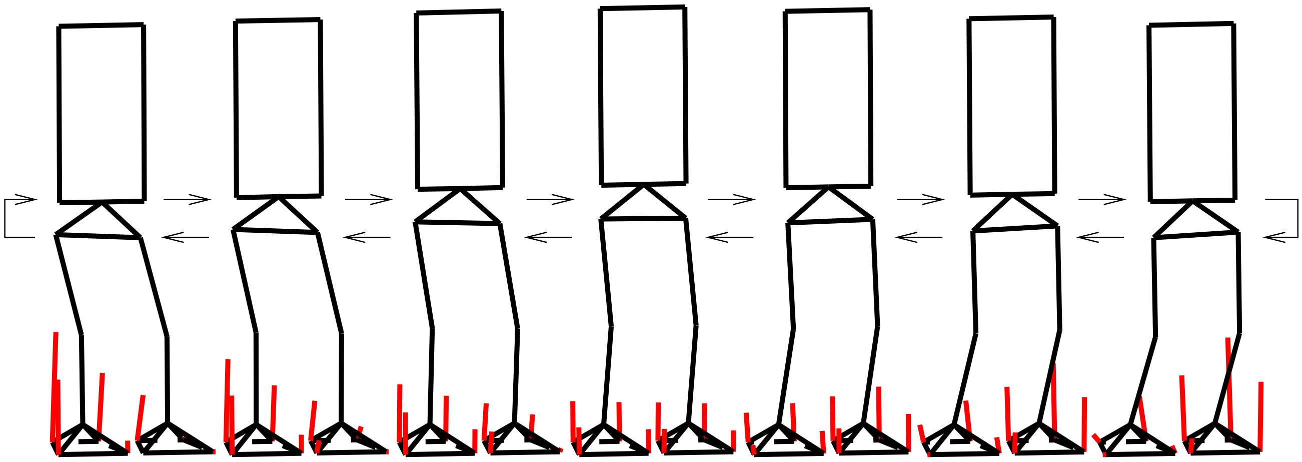


FIG. 6.7: *Résultat d'une simulation (vue de trois quart avant), le mouvement réalisé consistant en un transfert d'appui du pied droit vers le pied gauche et retour avec un léger déhanchement, les segments rouges symbolisant les forces de contact qui sont à l'œuvre.*

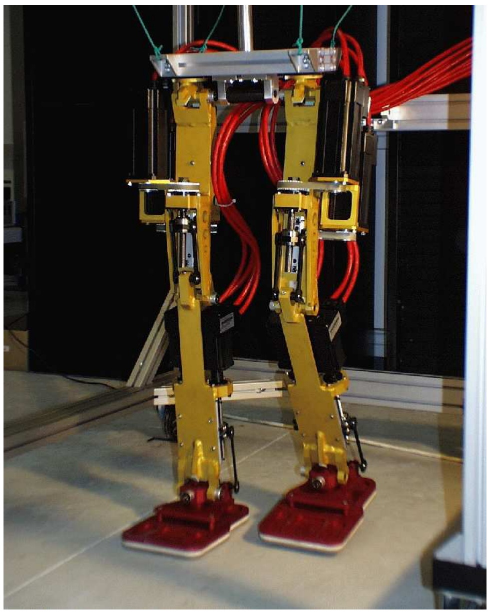


FIG. 6.8: *Une version simplifiée du robot BIP, sans bassin, sans tronc et se déplaçant uniquement dans un plan, que nous avons pu faire marcher en lui faisant réaliser des trajectoires statiquement stables.*

L'élément $Q_{19...21}$ de ce changement de variables ne résulte pas d'un choix particulier et aurait pu tout aussi bien être remplacé par une tâche secondaire du type évitement des butées articulaires [51]. Mais ce sont les éléments $Q_{10...12}$, $Q_{13...15}$ et $Q_{16...18}$ représentant les orientations de différentes parties du robot qui appellent le plus de commentaires : ces orientations sont représentées par des écarts entre les coordonnées de certains points caractéristiques, ce qui n'est pas dépourvu de singularités et d'ambiguïtés. Ce choix résulte du besoin manifesté à un moment donné de représenter ces orientations avec des fonctions simples qui aient un sens physique évident, mais il peut être intéressant de revoir ce choix pour introduire moins de singularités.

Remarquons pour finir que c'est un changement de variables similaire [4, 5] qui a été utilisé pour spécifier des trajectoires de marche (statiquement stables) qui ont été réalisées sans difficulté par une version simplifiée du robot BIP (figure 6.8).

6.5 Optimisation du temps de calcul

Les calculs qui prennent place dans le modèle dynamique d'un robot sont structurellement assez simples, mais ils prennent beaucoup d'ampleur lorsqu'il s'agit de prendre en compte l'ensemble des 21 degrés de liberté du robot BIP (le modèle que nous avons généré compte plus de 3 millions de caractères de source C). Or lorsqu'une loi de commande telle que celle présentée dans le chapitre précédent utilise ce modèle, il devient nécessaire d'optimiser son temps de calcul, car le temps de calcul d'une loi de commande détermine la fréquence à laquelle on peut l'échantillonner, ce qui peut avoir une influence décisive sur ses performances.

Le temps nécessaire pour le calcul d'une expression varie considérablement selon la façon dont ses différentes sous-expressions sont regroupées, factorisées ou développées. Il se trouve que la procédure de génération du modèle s'appuie principalement sur des compositions successives de matrices de changement de repère, ce qui génère de fait des expressions très structurées. En particulier, cela fait apparaître un grand nombre de sous-expressions qui se répètent fréquemment, ce dont Maple sait profiter en évitant d'évaluer plus d'une fois une même sous-expression, induisant une économie de calculs substantielle.

Mais une part non négligeable des sous-expressions qui apparaissent dans le modèle s'annulent entre elles, se compensent, principalement du fait de l'orthonormalité des matrices de rotation qui sont mises en jeu, et ceci entraîne une surcharge en calculs inutiles. Le problème est que le modèle dynamique du robot est beaucoup trop volumineux pour que l'on puisse rechercher et extraire après coup ces sous-expressions inutiles. Nous avons donc du ajuster les formules de génération du modèle afin d'en limiter l'apparition, en particulier en ce qui concerne le calcul des jacobiens de rotation.

Une économie de calculs considérable pourrait également être réalisée en considérant comme solide de référence non pas le pied droit, mais le bassin. De cette façon, le modèle est mieux équilibré et les chaînes cinématiques raccourcies, ce qui permettrait une réduction de moitié de la taille du modèle d'après quelques essais préliminaires. On pourrait également se passer de calculer certains termes dont l'influence est manifestement négligeable. En particulier, des 15 solides qui composent principalement le robot, 7 semblent avoir des caractéristiques dynamiques suffisamment faibles (ceux qui sont logés au milieu des articulations) pour ne pas avoir à être considérés individuellement. D'après quelques essais préliminaires, cette simplification permettrait une réduction supplémentaire d'un tiers de la taille du modèle.

Chapitre 7

Les actionneurs du robot BIP

Le robot BIP est composé en partie d'un assemblage de moteurs et de systèmes de transmission dont le but est de produire un ensemble de couples sur chacune de ses 15 articulations. Chaque association moteur – système de transmission, que nous appelons un *actionneur*, a un comportement dynamique propre qui interagit avec la dynamique de l'ensemble du robot. Cette dynamique propre nécessite une modélisation à part entière, d'autant plus dans le cas du robot BIP dont certains systèmes de transmissions mettent en jeu des relations non-linéaires.

Une partie de l'étude qui est proposée ici a été l'objet du stage de fin d'étude de Jean-Jacques Parmentier, qui a donc participé à l'élaboration de ces résultats. De plus amples détails sont d'ailleurs disponibles dans son rapport de stage [43] ainsi que dans le document de référence [52]. Pour cette raison, ce chapitre privilégie la concision.

7.1 Géométrie des systèmes de transmission

Les mécanismes qui transmettent le mouvement entre les axes moteurs et les axes articulaires du robot BIP se répartissent dans trois catégories distinctes [52].

La catégorie la plus simple, que l'on retrouve dans le bassin, est constituée d'une poulie et d'un réducteur Harmonic-Drive qui transmettent le mouvement en le multipliant par un rapport constant :

$$\theta_i = R\, q_i$$

où q_i est la variable articulaire, θ_i la rotation effectuée par le moteur correspondant, et R le rapport de multiplication.

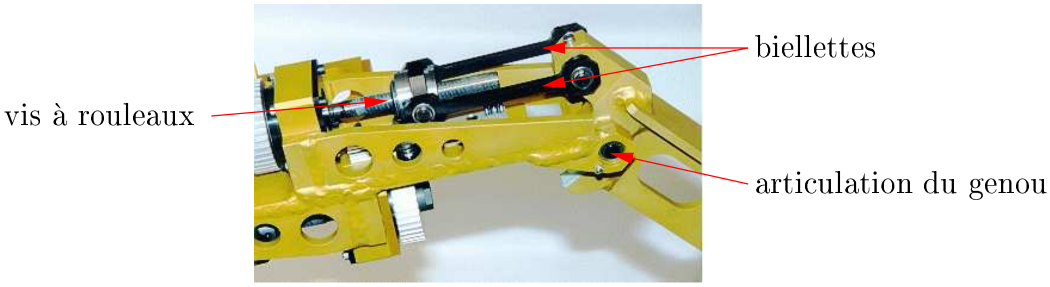


FIG. 7.1: *Système de transmission des genoux du robot BIP, composé d'une vis à rouleaux et de biellettes.*

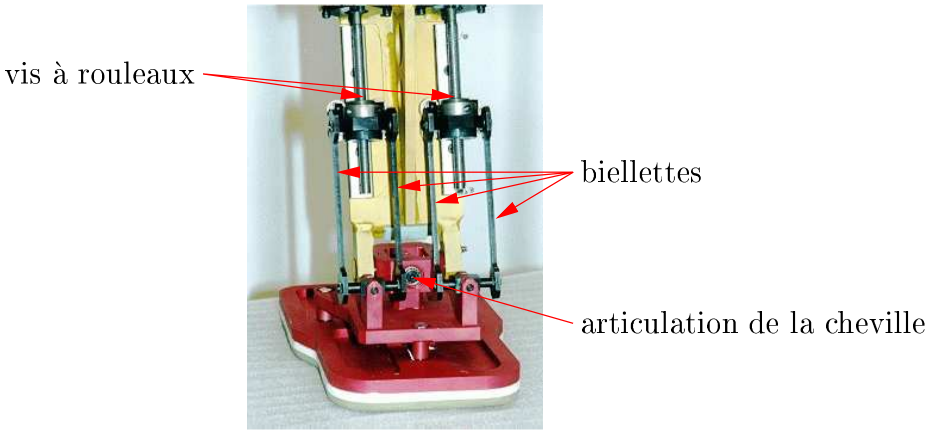


FIG. 7.2: *Système de transmission des chevilles du robot BIP, composé de deux ensembles vis à rouleaux / biellettes mis en parallèle.*

Une autre catégorie, que l'on retrouve dans les genoux et les hanches, est constituée d'une vis à rouleaux et de biellettes (figure 7.1) qui transmettent le mouvement suivant une relation non-linéaire [52] :

$$\theta_i = \frac{1}{p}\left[r\cos(q_i + \gamma - \phi) + \sqrt{l^2 - (e - r\sin(q_i + \gamma - \phi))^2} - x_0\right] \tag{7.1}$$

où p, r, γ, ϕ, l, e et x_0 sont des paramètres définis par la géométrie du système.

La dernière catégorie, enfin, que l'on retrouve dans les chevilles et les lombaires, est constituée de deux ensembles vis à rouleaux / biellettes (figure 7.2) mis en parallèle, couplant les mouvements de deux axes q_i et q_j et les reliant aux mouvements de deux moteurs θ_i et θ_j [52] :

$$\begin{cases} \theta_i = \dfrac{1}{p}\Big[-(b\cos q_i + d\sin q_i)\cos(q_j+\gamma) + c\sin(q_j+\gamma) - x_{i0} + \\ \qquad \sqrt{l^2 - (e - (b\cos q_i + d\sin q_i)\sin(q_j+\gamma) - c\cos(q_j+\gamma))^2 - (d\cos q_i - b\sin q_i - h)^2}\Big] \\ \theta_j = \dfrac{1}{p}\Big[-(b\cos q_i - d\sin q_i)\cos(q_j+\gamma) + c\sin(q_j+\gamma) - x_{j0} + \\ \qquad \sqrt{l^2 - (e - (b\cos q_i - d\sin q_i)\sin(q_j+\gamma) - c\cos(q_j+\gamma))^2 - (d\cos q_i + b\sin q_i - h)^2}\Big] \end{cases} \tag{7.2}$$

où p, b, d, γ, c, x_{i0}, x_{j0}, l, e et h sont des paramètres définissant la géométrie du système.

Le robot possède autant de moteurs que d'articulations, aussi, en appliquant pour chaque système de transmission la formule qui lui correspond, il est possible d'établir une relation entre l'ensemble des variables moteurs θ et l'ensemble des variables articulaires q_1 :

$$\theta = \mathcal{R}(q_1) \tag{7.3}$$

Dans la limite des valeurs que l'on peut rencontrer pour les variables q_1 et θ, cette relation constitue un difféomorphisme [43]. En le dérivant deux fois par rapport au temps, on peut alors établir des relations entre les vitesses et les accélérations des axes moteurs et articulaires :

$$\dot{\theta} = R(q_1)\,\dot{q}_1 \tag{7.4}$$

$$\ddot{\theta} = R(q_1)\,\ddot{q}_1 + r(q_1,\dot{q}_1)\,\dot{q}_1 \tag{7.5}$$

avec $R(q_1)$ la matrice jacobienne du difféomorphisme et $r(q_1,\dot{q}_1)\,\dot{q}_1$ les autres termes apparaissant lors de la seconde dérivation. La matrice $R(q_1)$ étant la jacobienne d'un difféomorphisme, elle est carrée et inversible. Plus particulièrement, c'est une matrice bloc-diagonale qui réunit les rapports de multiplication de l'ensemble des systèmes de transmission (ces rapports varient en fonction des positions articulaires q_1, du fait des non-linéarités des formules (7.1) et (7.2)).

7.2 Les frottements dans les systèmes de transmission

Les mécanismes que nous venons de présenter transmettent également les couples qui sont exercés sur les axes moteurs et articulaires, mais une étude expérimentale réalisée sur un prototype de jambe du robot [48] a montré que cette transmission était affectée par une série de frottements.

Considérons donc γ et τ, les couples que les systèmes de transmission exercent respectivement sur les axes moteurs et sur les axes articulaires. L'étude expérimentale a permis de préciser que les frottements se manifestent principalement sur les axes moteurs, et apparaissent comme la somme de deux termes, l'un constant f_* et l'autre proportionnel aux couples exercés sur les moteurs $\eta_*\gamma$. Les éléments du vecteur f_* et de la diagonale η_* varient en fonction des signes respectifs de $\dot{\theta}$ et de γ, de sorte que les frottements s'opposent toujours aux mouvements des moteurs [48]. Si l'on exprime alors la puissance développée par les systèmes de transmission, négative puisque strictement égale à la puissance perdue dans les frottements, on obtient un bilan énergétique de la forme :

$$\dot{\theta}^T \gamma + \dot{q}_1^T \tau = \dot{\theta}^T (\eta_* \gamma + f_*)$$

En appliquant ici la relation (7.4) puis en éliminant la vitesse $\dot{q}_1$ du résultat, on fait alors apparaître la relation implicite entre les couples moteurs et articulaires :

$$\tau = -R(q_1)^T (\gamma - \eta_* \gamma - f_*) \tag{7.6}$$

Notons que les frottements présents sur les axes moteurs sont multipliés par les rapports $R(q_1)^T$, ce qui explique leur prédominance.

7.3 Dynamique des actionneurs

Les rotors des moteurs sont donc soumis d'une part aux couples γ exercés par les systèmes de transmission, et d'autre part à des couples électro-magnétiques $k\,u$, où u est le vecteur des consignes envoyées aux moteurs et k une diagonale de constantes dépendant des moteurs ainsi que des variateurs qui en assurent le fonctionnement [52]. Leur dynamique s'écrit alors :

$$I\,\ddot{\theta} = k\,u + \gamma$$

où I est une diagonale rassemblant les inerties des rotors. Cette dynamique peut être entièrement réexprimée en fonction des grandeurs articulaires à partir des formules (7.5) et (7.6) :

$$\tau = R(q_1)^T (1 - \eta_*) \Big[k\,u - I\,R(q_1)\,\ddot{q}_1 - I\,r(q_1, \dot{q}_1)\,\dot{q}_1 \Big] + R(q_1)^T f_*$$

Or, nous avons vu dans le chapitre 3 que les couples articulaires apparaissent dans la dynamique du robot de la façon suivante :

$$M(q)\,\ddot{q} + N(q, \dot{q})\,\dot{q} + G(q) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + C(q)^T \lambda$$

On peut alors incorporer la dynamique des actionneurs de façon presque transparente :

$$M'(q)\,\ddot{q} + N'(q, \dot{q})\,\dot{q} + G(q) = T(q)\,u + f(q) + C(q)^T \lambda \tag{7.7}$$

en posant :

$$
\begin{aligned}
M'(q) = M(q) \ &+ \begin{bmatrix} R(q_1)^T (1-\eta_*) I \, R(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
N'(q,\dot q) = N(q,\dot q) \ &+ \begin{bmatrix} R(q_1)^T (1-\eta_*) I \, r(q_1,\dot q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
T(q) \ &= \begin{bmatrix} R(q_1)^T (1-\eta_*) \, k \\ 0 \end{bmatrix} \\
f(q) \ &= \begin{bmatrix} R(q_1)^T f_* \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(rappelons que la matrice $R(q_1)$ est carrée et inversible). En supposant dès le premier chapitre que les actionneurs génèrent des efforts de la forme $T(q)\,u$, nous avons implicitement supposé l'usage des matrices $M'(q)$ et $N'(q,\dot q)$ plutôt que $M(q)$ et $N(q,\dot q)$. En l'absence de frottements ($f_* = \eta_* = 0$), la prise en compte de la dynamique des actionneurs est tout à fait transparente et ne modifie aucun des résultats de cette thèse, mais du fait des termes f_* et η_* qui varient en fonction des signes de $\dot\theta$ et de γ, cette dynamique présente des discontinuités, ce qui est beaucoup plus ardu tant à simuler qu'à commander. Ces frottements n'ont donc pas été pris en compte dans cette thèse, en attendant de pouvoir les intégrer de façon satisfaisante.

7.4 Comportement impulsionnel

Lorsque le robot percute le sol, sa vitesse $\dot q$ varie instantanément sous l'effet d'efforts impulsionnels, et nous avons pu étudier le comportement qui en résulte dans la section 2.7. En reprenant la procédure de calcul de cette section, on peut étudier la répercussion de ces effets impulsionnels entre les axes moteurs et articulaires, et extraire de la dynamique (7.7) sa composante impulsionnelle :

$$M'(q)\,(\dot q_+ - \dot q_-) = C(q)^T \Lambda$$

Notons que dans cette dynamique, nous considérons la présence de frottements impulsionnels correspondants aux termes $\eta_*\gamma$. Les facteurs η_* dépendent des signes respectifs des vitesses et des couples, mais les vitesses peuvent changer de signe instantanément au cours de l'impact, auquel cas ces facteurs se trouvent changer de valeur au cours même de l'impact, ce qui rend le calcul de ce modèle assez délicat. Mais puisque ces frottements n'ont pas été pris en compte dans cette thèse, cette difficulté a été évitée.

7.5 Approximation numérique de la géométrie

Les rotations moteurs θ peuvent être connues avec précision grâce aux variateurs qui alimentent les moteurs en énergie [6]. Ceci nous permet alors d'estimer les positions articulaires q_1 en inversant la relation (7.3) :

$$q_1 = \mathcal{R}^{-1}(\theta) \tag{7.8}$$

Mais la relation (7.3) est composée pour partie de formules du type (7.2) qui ne peuvent pas être inversées analytiquement [8] : cette inversion doit donc être estimée numériquement.

Le calcul de cette estimation devant être le plus bref possible pour ne pas affecter la fréquence d'échantillonnage de la loi de commande, nous avons choisi de développer des approximations affines par morceaux des inverses des formules (7.1) et des approximations bi-affines par morceaux (affines en θ_i et affines en θ_j) des inverses des formules (7.2). Notons que l'on peut régler la taille des morceaux utilisés pour faire ces approximations afin d'obtenir la précision voulue (annexe C). Il s'est par ailleurs révélé plus adapté [43] de réaliser les approximations bi-affines en fonction des sommes $\theta_i + \theta_j$ et des différences $\theta_i - \theta_j$ plutôt que directement en fonction des variables θ_i et θ_j.

Cette approximation de la relation (7.8) peut également être dérivée pour fournir une estimation des rapports de réduction $R(q_1)^{-1}$. L'erreur produite par cette estimation n'a pas été étudiée, mais dans le cadre de l'approximation au $1/200^e$ de degré de la relation (7.8) que nous avons mis en place dans le contrôleur du robot, elle a été évaluée à 3%.

Annexe C

Calcul d'erreur

Dans cette annexe, nous considérons l'approximation affine (resp. bi-affine) d'une fonction C^2 sur un compact de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et nous étudions l'erreur produite lors de cette approximation en fonction de la taille du compact sur lequel elle est réalisée.

C.1 Approximation affine sur $\mathbb{R}$

Soit $f(x)$ une fonction C^2 définie sur un segment $[a\,b]$, sa dérivée seconde est donc bornée sur ce compact :

$$|f''(x)| \leq K$$

Construisons une approximation affine de cette fonction :

$$\hat{f}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ce qui revient à considérer un segment de droite passant par les points $[a, f(a)]$ et $[b, f(b)]$ (figure C.1). Intéressons-nous alors à l'erreur maximale induite par cette approximation, maximum que nous supposons atteint en un point c :

$$\max_{[a\,b]} |\varepsilon(x)| = |\varepsilon(c)|$$

avec $\varepsilon(x) = f(x) - \hat{f}(x)$. Supposons, sans perte de généralité, que ce point c est plus proche de b que de a, donc que $|b - c| \leq \frac{1}{2}|b - a|$. Afin d'établir une majoration de l'erreur, nous

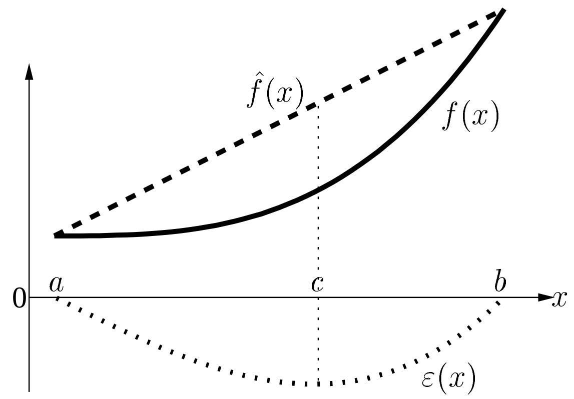


FIG. C.1: *Le point c situe l'erreur maximale induite par l'approximation de la fonction $f(x)$ par la fonction affine $\hat{f}(x)$, c'est un optimum de la fonction $\varepsilon(x)$.*

allons utiliser égalemement le fait que $\varepsilon(b) = 0$, que $|\varepsilon''| = |f''| \leq K$, ainsi que le fait que le point c est un optimum de ε, donc que $\varepsilon'(c) = 0$:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(c)| &= |\varepsilon(b) - \varepsilon(c)| \\
&= \left| \int_c^b \varepsilon'(u)\, du \right| \\
&\leq \int_c^b |\varepsilon'(u)|\, du \\
&\leq \int_c^b |\varepsilon'(u) - \varepsilon'(c)|\, du \\
&\leq \int_c^b K|u - c|\, du \\
&\leq \frac{1}{2} K(b-c)^2 \\
&\leq \frac{1}{8} K(b-a)^2
\end{aligned}$$

Remarquons que pendant le stage de Jean-Jacques Parmentier, nous n'avions majoré cette erreur que par :

$$\frac{1}{2} K(b-a)^2$$

ce qui nous amenait à sous-évaluer la qualité de l'approximation.

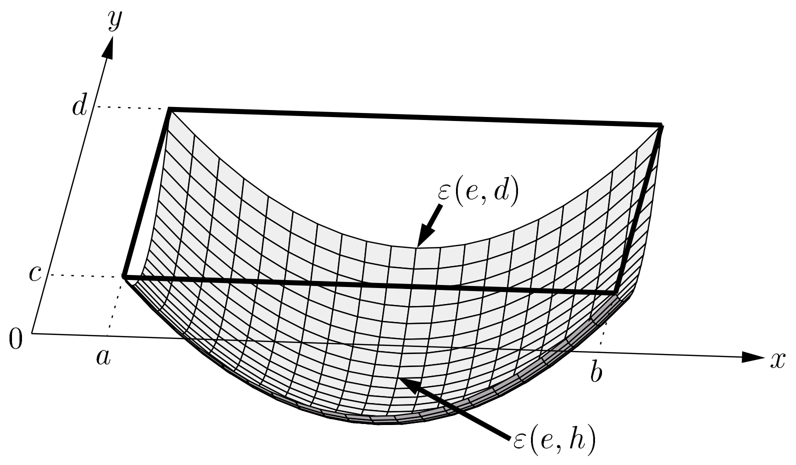


FIG. C.2: *Tracé de la fonction $\varepsilon(x, y)$, qui est nulle par définition à chaque coin du rectangle $[a\,b] \times [c\,d]$. Le point (e, h) situe l'erreur maximale induite par l'approximation bi-affine.*

C.2 Approximation bi-affine sur $\mathbb{R}^2$

Considérons maintenant $f(x, y)$ une fonction C^2 définie sur un rectangle $[a\,b] \times [c\,d]$, ses dérivées secondes par rapport à x et par rapport à y sont donc bornées sur ce compact :

$$|f''_{xx}(x, y)| \leq K_x$$

$$|f''_{yy}(x, y)| \leq K_y$$

Construisons une approximation bi-affine de cette fonction (affine en x et affine en y) en utilisant le schéma numérique :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, y) = f(a, c) + \frac{f(b, c) - f(a, c)}{b - a}(x - a) + \frac{f(a, d) - f(a, c)}{d - c}(y - c) \\ + \frac{f(a, c) + f(b, d) - f(a, d) - f(b, c)}{(b - a)(d - c)}(x - a)(y - c)\end{aligned}$$

ce qui revient à considérer une surface réglée, c'est à dire un faisceaux de segments de droites, passant par les points $[a, c, f(a, c)]$, $[b, c, f(b, c)]$, $[a, d, f(a, d)]$ et $[b, d, f(b, d)]$. Intéressons-nous alors à l'erreur maximale induite par cette approximation, maximum que nous supposons atteint en un point (e, h) (figure C.2) :

$$\max_{[a\,b]\times[c\,d]} |\varepsilon(x, y)| = |\varepsilon(e, h)|$$

avec $\varepsilon(x,y) = f(x,y) - \hat{f}(x,y)$. Supposons sans perte de généralité que h est plus proche de d que de c, donc que $|d-h| \leq \frac{1}{2}|d-c|$. Afin d'établir une majoration de l'erreur, nous procédons comme précédemment en utilisant le fait que $|\varepsilon''_{yy}| = |f''_{yy}| \leq K_y$, ainsi que le fait que le point (e,h) est un optimum de ε, donc que $\varepsilon'_y(e,h) = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rcl} |\varepsilon(e,h)| & \leq & |\varepsilon(e,d)| + |\varepsilon(e,d) - \varepsilon(e,h)| \\ & \vdots & \\ & \leq & |\varepsilon(e,d)| + \dfrac{1}{8}K_y(d-c)^2 \end{array}$$

Puisque $\hat{f}$ est affine en x, la valeur de $\hat{f}(e,d)$ résulte d'une approximation affine de f le long de l'axe x entre les points (a,d) et (b,d), donc d'après la section précédente, nous savons que :

$$|\varepsilon(e,d)| \leq \frac{1}{8}K_x(b-a)^2$$

ce qui nous permet d'aboutir à la majoration :

$$|\varepsilon(e,h)| \leq \frac{1}{8}K_x(b-a)^2 + \frac{1}{8}K_y(d-c)^2$$

Conclusion

L'objectif de ce travail de thèse était de pouvoir donner à un robot anthropomorphe la capacité de marcher par ses propres moyens, et nous ne l'avons pas atteint, du moins, pas complètement : une difficulté théorique majeure réside dans le contrôle de la stabilité d'un système mécanique en présence de prises de contact et de pertes de contact avec l'environnement. Cette difficulté théorique explique d'ailleurs très probablement le côté excessivement expérimental des recherches qui ont été menées jusque là dans le domaine des robots marcheurs.

Ceci-dit, nous avons développé en chemin un cadre cohérent d'étude de la dynamique et de la stabilité des robots marcheurs, qui représente sans aucun doute un des principaux apports de cette thèse. Tout commence par une formulation originale de la dynamique d'un robot, qui s'appuie sur le principe de moindre déviation, et qui fournit des formules essentielles à la suite de l'analyse (les formules (1.4)-(1.6) sont au cœur des résultats de l'annexe B). Un modèle de contact rigide avec frottement sec est ensuite mis en place, modèle qui pose quantité de problèmes théoriques dont nous donnons un bref aperçu, mais qui se révèle particulièrement adapté à l'analyse des mouvements d'un robot marcheur.

Le point central de cette étude se trouve dans la distinction entre posture, emplacement et orientation du robot, et entre les mouvements correspondants, changements de posture, déplacements et rotations. Nous montrons que cette distinction structure profondément la dynamique du robot et explique en particulier l'apparition du comportement de marche, par nécessité de prendre appui sur le sol, et par nécessité de renouveler ses appuis régulièrement. Nous clôturons alors ce cadre d'étude en introduisant la notion de viabilité qui permet de discerner au mieux les conditions d'équilibre ou de déséquilibre des robots marcheurs.

L'ensemble des points de vues qui sont développés au cours de cette étude semblent relativement nouveaux, ils ont en tous cas été mis à profit pour proposer une loi de commande qui devrait, sous certaines conditions, assurer l'équilibre du robot même en présence de fortes perturbations.

En dehors de ces résultats théoriques, une part non-négligeable de ce travail de thèse a été consacrée à diverses réalisations expérimentales mettant en jeu le robot BIP. Bien que balbutiantes, les expérimentations qui ont été menées dans le projet BIP ont déjà présenté des résultats parmi les meilleurs obtenus à ce jour avec des robots bipèdes, ceci grâce à la grande qualité de la réalisation mécanique qui permet de s'appuyer sur un modèle dynamique très proche de la réalité.

Une multitude de problèmes d'ordre théorique, technique ou numérique se sont posés lors des expérimentations et des simulations, beaucoup n'ayant pas encore été résolus. La génération de trajectoires de marche n'en est d'ailleurs pas un des moindres. Mais trois sujets semblent se dégager de cette multitude de problèmes comme étant des sujets à développer de façon prioritaire dans les recherches à venir :

— contrôler la stabilité d'un système mécanique en présence de prises de contact et de pertes de contact avec l'environnement est évidemment un problème crucial, l'équilibre des robots marcheurs ne pouvant être assuré correctement tant qu'il ne sera pas résolu,

— ce ne sont pas les forces extérieures mais les couples extérieurs qui font le plus défaut à un robot marcheur, comme le montre le fait que son équilibre est bien mieux assuré si ses appuis sont espacés, ce qui n'influence pas les forces de contact disponibles, mais ce qui détermine les couples produits (ceci justifie d'ailleurs les choix effectués dans [60] ainsi que le succès relatif du critère du ZMP (section 3.5), qui se focalisent sur les problèmes de couples). De ce point de vue, il pourrait se révéler intéressant d'envisager des robots marcheurs équipés de volants inertiels [54]. Mais cela indique surtout que c'est l'équation d'Euler présentée dans l'annexe B qui est au centre du problème de l'équilibre des robots marcheurs : nous avons vu que cette équation ne peut pas être simplifiée analytiquement, étant non-holonome, mais nous avons vu également que cette non-holonomie semble se réduire à une holonomie dans le cadre d'un comportement de marche normal. L'équation de Newton correspondante ayant d'origine une structure simple, simplifier cette équation d'Euler serait le dernier pas vers une meilleure appréhension des mouvements du robot, facilitant la possibilité de poser des bornes sur les domaines de stabilité et sur le noyau de viabilité,

— un dernier point probablement lié aux deux précédents concerne la stabilité intrinsèque des robots marcheurs illustrée lors de l'étude des robots passifs [33, 37] et mise à profit dans [45] : une meilleure compréhension de cette stabilité, qui semble intimement liée aux prises de contact et à leur influence sur le moment dynamique du robot, permettrait très probablement d'alléger la loi de commande et de bénéficier d'une meilleure robustesse du comportement du robot.

Bibliographie

[1] J.-P. Aubin. *Viability Theory.* Birkhäuser, 1991.

[2] J.-P. Aubin. Impulse and hybrid control systems : a viability approach. Rapport de recherche, 1999.

[3] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, 1990.

[4] C. Azevedo and N. Andreff. Étude expérimentale des premières démarches du robot BIP2000. Rapport de recherche, INRIA, 2000.

[5] C. Azevedo and the Bip team. Control architecture and algorithms of the anthropomorphic biped robot BIP2000. In *Proc. of the 2000 Int. Conf. on Climbing and Walking Robots.*

[6] G. Baille, P. Di Giacomo, H. Mathieu, and R. Pissard-Gibollet. L'armoire de commande du robot bipède BIP2000. Rapport technique, INRIA, 2000.

[7] D. Baraff. Non-penetrating rigid body simulation. In *EuroGraphics'93 State of the Art Reports.*

[8] P. Bessonnet, T. Saidouni, and P. Sardain. Kinematic analysis of a parallel mechanism actuating the ankle of a biped robot. In *Proc. of the 10th world congress on the theory of machine and mechanisms.*

[9] W. Blajer and W. Schiehlen. Walking without impacts as a motion/force control problem. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1992.

[10] B. Brogliato. *Nonsmooth Impact Mechanics.* Springer-Verlag, 1996.

[11] B. Brogliato, S. Niculescu, and M. Monteiro-Marques. On tracking control of a class of complementarity-slackness hybrid mechanical systems. *Systems and Contol Letters*, 2000.

[12] B. Brogliato, A.A. ten Dam, L. Paoli, F. Génot, and M. Abadie. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems. *Submitted to the ASME Applied Mechanics Reviews.*

[13] O. Bruneau, F. Ben Ouezdou, and P.B. Wieber. Dynamic transition simulation of a walking anthropomorphic robot. In *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[14] G. Cabodevilla. *Détermination de trajectoires optimales en énergie d'un robot bipède.* Thèse de doctorat, ULP, 1997.

[15] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, and G. Bastin. *Theory of Robot Control.* Springer, 1996.

[16] G.A. Cavagna, N.C. Heglund, and C.R. Taylor. Mechanical work in terrestrial locomotion: two basic mechanisms for minimizing energy expenditure. *American Journal of Physiology*, 1977.

[17] G.A. Cavagna, H. Thys, and A. Zamboni. The sources of external work in level walking and running. *Journal of Physiology*, 1976.

[18] P.H. Channon, S.H. Hopkins, and D.T. Pham. Derivation of optimal walking motions for a bipedal robot. *Robotica*, 1992.

[19] Euromech Colloquium 397. *Impact in Mechanical Systems*, 1999.

[20] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization.* John Wiley & Sons, 1987.

[21] Y. Fujimoto, S. Obata, and A. Kawamura. Robust biped walking with active interaction control between foot and ground. In *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[22] F. Génot. *Contributions à la modélisation et à la commande des systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales.* Thèse de doctorat, INPG, 1998.

[23] F. Génot and B. Espiau. On the control of the mass center of legged robots under unilateral constraints. In *Proc. of the First International Symposium on Mobile, Climbing and Walking Robots CLAWAR'98.*

[24] B. Goodwine and J. Burdick. Trajectory generation for kinematic legged robots. In *Proc. of the 1997 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[25] A. Goswami. Postural stability of biped robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) point. *International Journal of Robotics Research*, 1999.

[26] M. Hardt. *Multibody Dynamical Algorithms, Numerical Optimal Control, with Detailed Studies in the Control of Jet Engine Compressors and Biped Walking.* PhD thesis, UCSD, 1999.

[27] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, and T. Takaneka. The development of Honda humanoid robot. In *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[28] Honda. U.S. Patents number : 5,432,417; 5,311,109; 5,355,064; 5,349,277; 5,426,586; 5,459,659; 5,357,433; 5,402,050; 5,252,901.

[29] Q. Huang, K. Kaneko, K. Yokoi, S. Kajita, T. Kotoku, N. Koyachi, H. Arai, N. Imamura, K. Komoriya, and K. Tanie. Balance control of a biped robot combining off-line pattern with real-time modification. In *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[30] Y Hurmuzlu. Dynamics of bipedal gait: Part I – objective functions and the contact event of a planar five-link biped. *Journal of Applied Mechanics*, 1993.

[31] Y Hurmuzlu. Dynamics of bipedal gait: Part II – stability analysis of a planar five-link biped. *Journal of Applied Mechanics*, 1993.

[32] S. Kajita, T. Yamaura, and A. Kobayashi. Dynamic walking control of a biped robot along a potential energy conserving orbit. *IEEE Transactions on Robotics & Automation*, 1992.

[33] A. Keramane. *Cycles de marche des robots de type compas : analyse et commande.* Thèse de doctorat, INPG, 1997.

[34] W. Khalil and D. Creusot. Symoro+: a system for the symbolic modelling of robots. *Robotica*, 1995.

[35] W. Khalil and J.F. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed loop robots. In *Proc. of the 1986 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[36] Y. Le Stratt. Etude des schémas numériques pour la génération de trajectoires optimales d'un robot bipède. Rapport de stage de DEA, UJF, 1998.

[37] T. McGeer. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research*, 1990.

[38] J.J. Moreau. Quadratic programming in mechanics: dynamics of one-sided constraints. *J. SIAM Control*, 1966.

[39] R.M. Murray, Z. Li, and S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation.* CRC Press, 1994.

[40] J.F. Nethery and M.W. Spong. Robotica: a Mathematica package for robot analysis. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 1994.

[41] J. Ostrowski and J. Burdick. Geometric perspectives on the mechanics and control of robotic locomotion. In *Proc. of the 1995 International Symposium on Robotics Research.*

[42] J.H. Park and H.C. Cho. An on-line trajectory modifier for the base link of biped robots to enhance locomotion stability. In *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[43] J.J. Parmentier. Contribution à la commande d'un robot bipède. Rapport de stage, Ecole Polytechnique, 1999.

[44] F. Pfeiffer and C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts.* John Wiley & Sons, 1996.

[45] J. Pratt and G. Pratt. Intuitive control of a planar bipedal walking robot. In *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[46] M.H. Raibert. *Legged robots that balance.* MIT Press, 1986.

[47] J. Rose and J.G. Gamble. *Human Walking.* Williams & Wilkins, 1994.

[48] M. Rostami. *Contribution à l'étude dynamique de la phase unipodale de la marche sagittale, et étude expérimentale du comportement dynamique d'un membre locomoteur anthropomorphe de robot bipède.* Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1999.

[49] L. Roussel. *Génération de trajectoires optimales de marche pour un robot bipède.* Thèse de doctorat, INPG, 1998.

[50] A. Ruina. Nonholonomic stability aspects of piecewise holonomic systems. *Reports on Mathematical Physics*, 1998.

[51] C. Samson, M. Le Borgne, and B. Espiau. *Robot Control: The Task Function Approach.* Oxford Science Publications, 1991.

[52] P. Sardain. Paramètres de BIP2000. Rapport technique, LMS, 2000.

[53] C.L. Shih, Y.Z. Li, S. Churng, T.T. Lee, and W.A. Gruver. Trajectory synthesis and physical admissibility for a biped robot during the single-support phase. In *Proc. of the 1990 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[54] M.W. Spong, P. Corke, and R. Lozano. Nonlinear control of the gyroscopic pendulum. *Submitted to Automatica.*

[55] M.W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control.* John Wiley & Sons, 1989.

[56] N. Tchétaev. *Mécanique rationnelle.* Éditions Mir Moscou, 1993.

[57] C.L. Vaughan, B. Davis, and J.C. O'Connor. *Dynamics of Human Gait.* Human Kinetics, 1992.

[58] M. Vukobratović, B. Borovac, D. Surla, and D. Stokić. *Biped Locomotion : Dynamics, Stability, Control and Application.* Springer-Verlag, 1990.

[59] J. Yamaguchi, N. Kinoshita, A. Takanashi, and I. Kato. Development of a biped walking robot adapting to the humans' living floor. In *Proc. of the 1996 IEEE International Conference on Robotics & Automation.*

[60] J. Yamaguchi, A. Takanashi, and I. Kato. Development of a biped walking robot compensating for three-axis moment by trunk motion. In *Proc. of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems.*

[61] Y. Zhang, H. Tian, W. Qiang, and P. Fu. Sensor-based locomotion control system of biped robot. In *Proc. of the 3rd Asian Control Conference.*

[62] Y.F. Zheng. Acceleration compensation for biped robots to reject external disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1989.

[63] `http://www.fzi.de/divisions/ipt/WMC/preface/preface.html`.

[64] `http://www.mel.go.jp/soshiki/robot/undo/kajita/bipedsite-e.html`.

[65] `http://www.androidworld.com/index.htm`.

[66] `http://www.humanoid.rise.waseda.ac.jp/booklet/kato_4.html`.

[67] `http://www.ai.mit.edu/projects/leglab/robots/robots.html`.

Modélisation et Commande d'un Robot Marcheur Anthropomorphe

Les robots marcheurs présentent une instabilité structurelle, du fait de contraintes dynamiques qui restreignent fortement l'étendue des mouvements qu'ils peuvent accomplir.

Nous commençons alors par proposer une formulation de la dynamique des robots marcheurs qui fait apparaître la structure spécifique de ces contraintes, démontrant notamment l'importance des appuis au sol. En s'appuyant ensuite sur la notion de viabilité, nous développons un point de vue inédit sur l'équilibre des robots marcheurs, ce qui nous amène à proposer une loi de commande totalement nouvelle, évaluant en permanence, parmi un ensemble de mouvements connus, ceux que le robot est capable de réaliser compte tenu de son état dynamique.

Un ensemble de développements logiciels et de travaux expérimentaux sont également entrepris autour du robot BIP, robot anthropomorphe comportant 15 articulations actionnées.

MOTS-CLÉS : Robots Marcheurs, Principe de Gauss, Contraintes Unilatérales, Noyau de Viabilité, Fonction de Tâche, Trajectoires Paramétrées.

Modelling and Control of an Anthropomorphic Walking Robot

Walking robots exhibit a structural instability, due to dynamical constraints which strongly narrow the range of movements that they can achieve.

We begin therefore by proposing a formulation of the dynamics of walking robots, which unveils the specific structure of these constraints, stressing especially the importance of the supports on the ground. Relying then on the notion of viability, we develop an original point of view about the balance of walking robots, leading to the design of a completely new control law, which continuously evaluates, within a set of known movements, which ones the robot is able to realize in view of its dynamical state.

Some experiments and software developments are also tackled around the BIP robot, an anthropomorphic robot having 15 actuated joints.

KEYWORDS : Walking Robots, Gauss Principle, Unilateral Constraints, Viability Kernel, Task Function, Parametrized Trajectories.