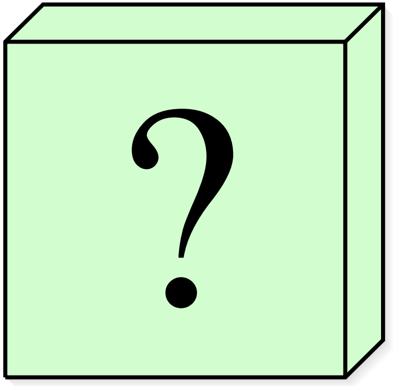
Étude de la connaissance dans le cadre d'observations partielles : La logique de l'observation

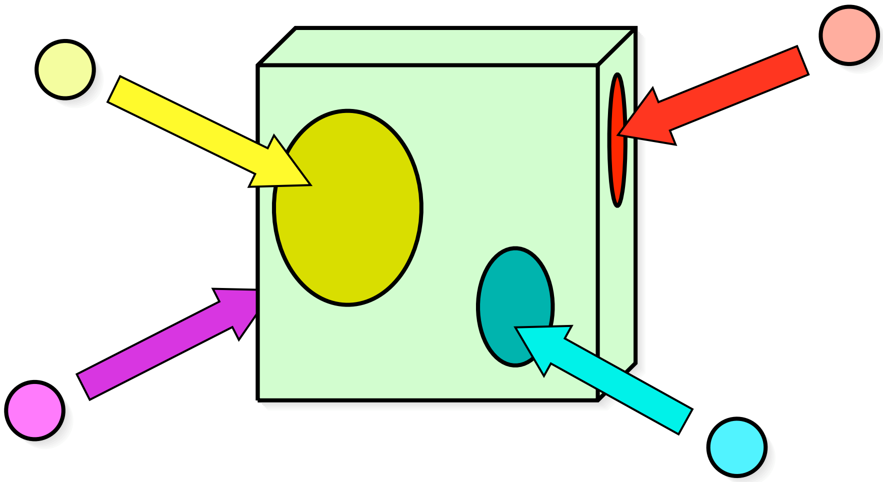
Olivier Brunet

INRIA Rhône-Alpes
obrunet@inrialpes.fr

Introduction



Introduction



Exemple préliminaire

Albert, Benoit et Céline sont côte-à-côte au cinéma.

Comment s'assoient-ils ?

Exemple préliminaire

Albert, Benoit et Céline sont côte-à-côte au cinéma.
Comment s'assoient-ils ?

Céline ne s'intéresse qu'à sa place :

"Je ne suis pas à la place 3", "Je suis à la place 2"

Exemple préliminaire

Albert, Benoit et Céline sont côte-à-côte au cinéma.
Comment s'assoient-ils ?

Céline ne s'intéresse qu'à sa place :

"Je ne suis pas à la place 3", *"Je suis à la place 2"*

Albert veut savoir s'il est à côté de Céline :

"Je ne suis pas à côté d'elle", *"Elle est à ma gauche"*

Applications

Informatique distribuée

L'information est répartie entre plusieurs points.

Intelligence artificielle

Communication dans les systèmes multi-agents.

Représentation de connaissances.

Analyse de programmes

L'état en un point du programme est une description partielle.

Sciences expérimentales

La connaissance provient d'observations partielles.

Idée directrice

Toute connaissance provient constructivement d'observations.

Idée directrice

Toute connaissance provient constructivement d'observations.

Deux conséquences simples :

L'absence d'observation n'apporte aucune connaissance.

Idée directrice

Toute connaissance provient constructivement d'observations.

Deux conséquences simples :

L'absence d'observation n'apporte aucune connaissance.

On ne peut être sûr qu'une observation est complète.

Plan

Présentation du contexte

Formalisation algébrique

- Systèmes de représentation
- Traduction logique

Étude de la logique sous-jacente

- Définition de **OL**
- Axiomes non valides
- L'axiome de la connaissance **T** : $K_i\,\varphi \rightarrow \varphi$

Crise de la connaissance

- Absence nécessaire de **T**
- Objectivité

Première partie

Contexte

État de l'art

Théories de Galois, Espaces de Chu

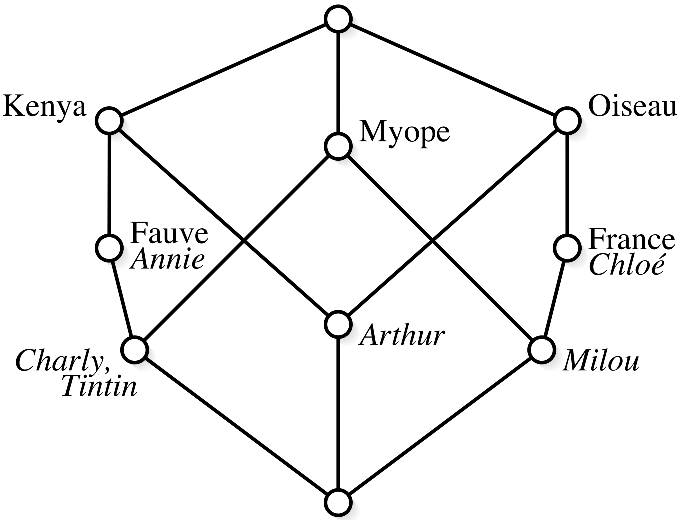
Relation entre deux ensembles : Objet / Attribut

Nom	Fauve	Oiseau	Kenya	France	Myope
Charly	x		x		x
Arthur		x	x		
Chloé		x		x	
Milou		x		x	x
Tintin	x		x		x
Annie	x		x		

État de l'art

Théories de Galois, Treillis de Galois

On introduit la notion d'ordre.

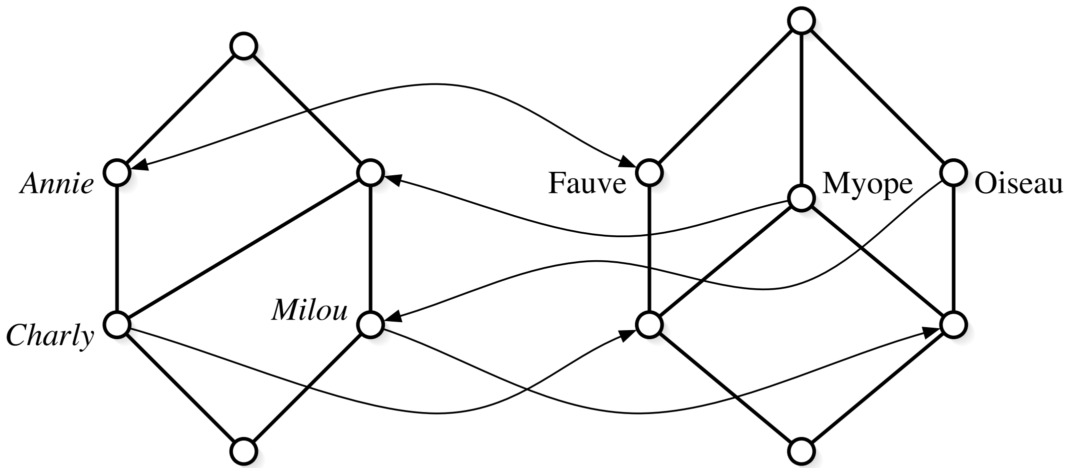


B. Ganter, R. Wille “Formal Concept Analysis” *Springer Verlag*

État de l'art

Théories de Galois, Correspondances de Galois

Relation sous forme de fonctions monotones.



État de l'art

Analyse de flux d'informations

Mets en relation les deux domaines.

Exemple

$$
\begin{aligned}
\text{Fauve} &\vdash \text{Kenya} \\
\text{Oiseau, Myope} &\vdash \text{France} \\
&\vdash \text{Fauve, Oiseau} \\
\text{Kenya, France} &\vdash
\end{aligned}
$$

J. Barwise, J. Seligman "Information Flow : The Logic of Distributed Systems"
Cambridge University Press

État de l'art

Logique épistémique

Exemple

$$K_{\text{Pierre}}\, \mathit{PaulSaladeDents} \wedge \neg K_{\text{Paul}}\, \mathit{PaulSaladeDents}$$

Logique principalement utilisée : **S5**

R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, M. Vardi "Reasoning about Knowledge"
The MIT Press

Deuxième partie

Systèmes de représentation

Définition du formalisme

Exemple

Albert, Benoit et Céline sont côte-à-côte au cinéma.
Comment s'assoient-ils ?

Céline ne s'intéresse qu'à sa place :

"Je ne suis pas à la place 3", *"Je suis à la place 2"*

Albert veut savoir s'il est à côté de Céline :

"Je ne suis pas à côté d'elle", *"Elle est à ma gauche"*

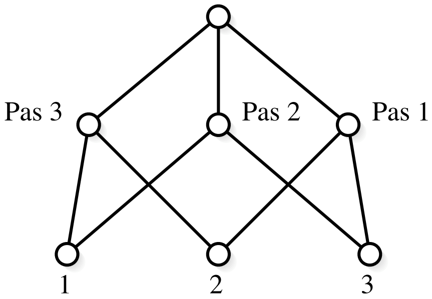
Définition du formalisme

Représentation

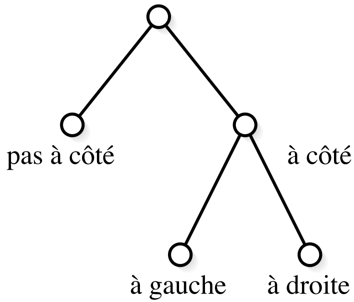
Ensemble partiellement ordonné de descriptions partielles.

$$\mathcal{R} = \langle R, \leq \rangle$$

Exemple



Représentation de *Céline*



Représentation de *Albert*

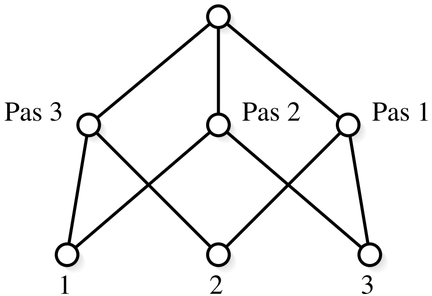
Définition du formalisme

Fonctions de transformation

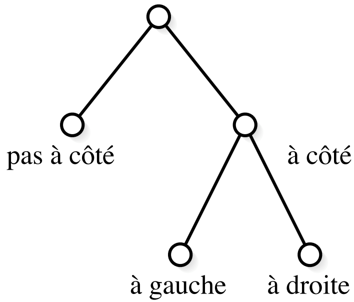
Traduisent les descriptions entre représentations.

$$f_{i|j} : \mathcal{R}_j \longrightarrow \mathcal{R}_i$$

Exemple



Représentation de *Céline*



Représentation de *Albert*

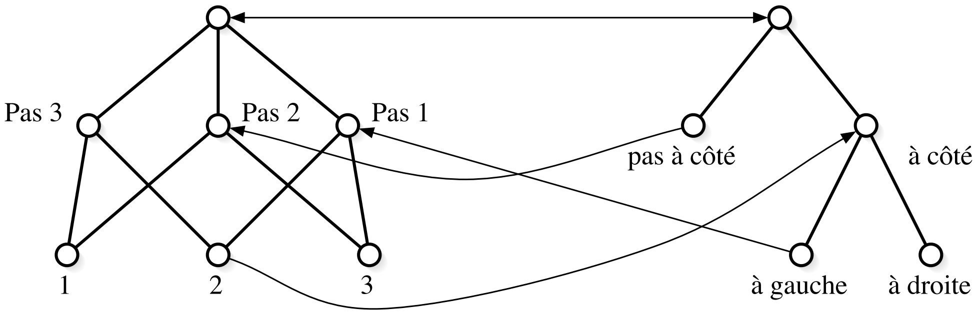
Définition du formalisme

Fonctions de transformation

Traduisent les descriptions entre représentations.

$$f_{i|j} : \mathcal{R}_j \to \mathcal{R}_i$$

Exemple



Représentation de *Céline* Représentation de *Albert*

Définition du formalisme

Fonctions de transformation

Si $d_j \in \mathcal{R}_j$, $f_{i|j}(d_j)$ est la description de $\mathcal{R}_i$ qui :

– décrit une situation plus générale que d_j.

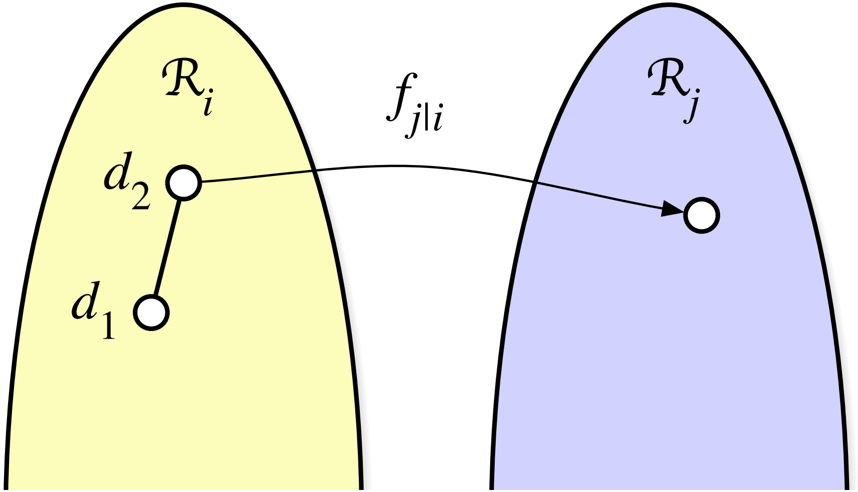
On perd de l'information

– est la plus précise (pour l'ordre partiel $\leq_i$) dans ce cas-là.

On en perd le moins possible

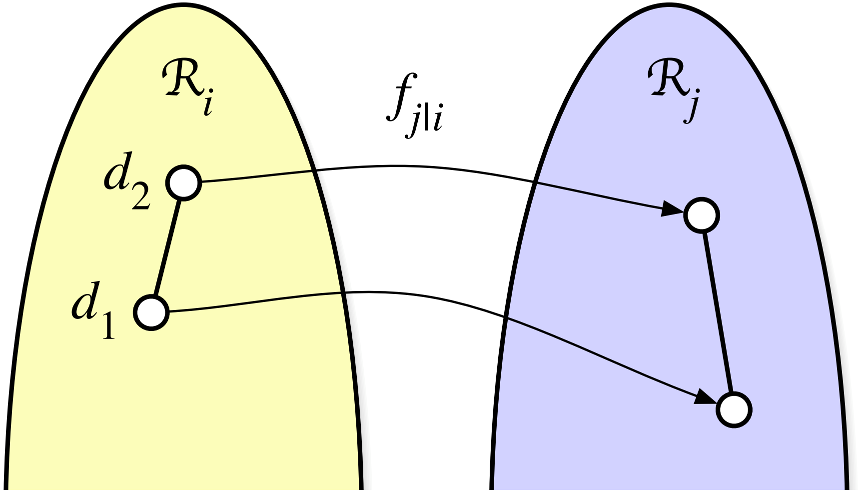
Définition du formalisme

Fonctions de transformation, Croissance



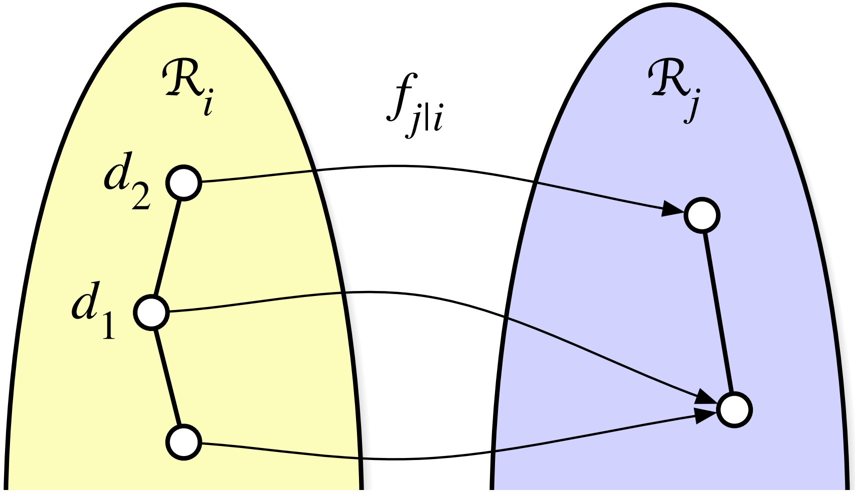
Définition du formalisme

Fonctions de transformation, Croissance



Définition du formalisme

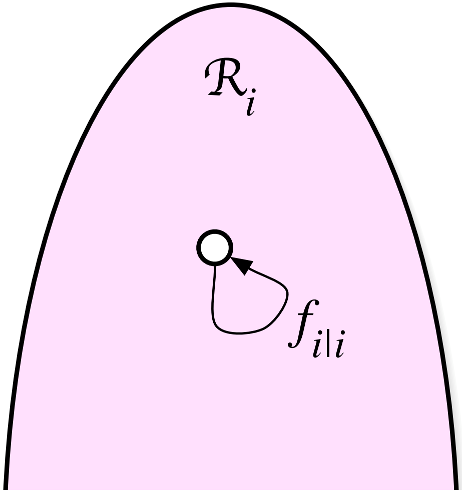
Fonctions de transformation, Croissance



$$d_1 \leq d_2 \Rightarrow f_{i|j}(d_1) \leq f_{i|j}(d_2)$$

Définition du formalisme

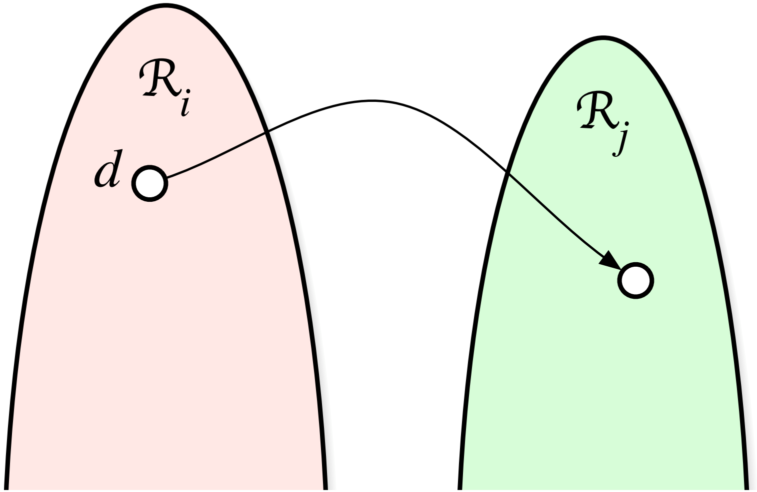
Fonctions de transformation, Identité



$$f_{i|i}(d) = d$$

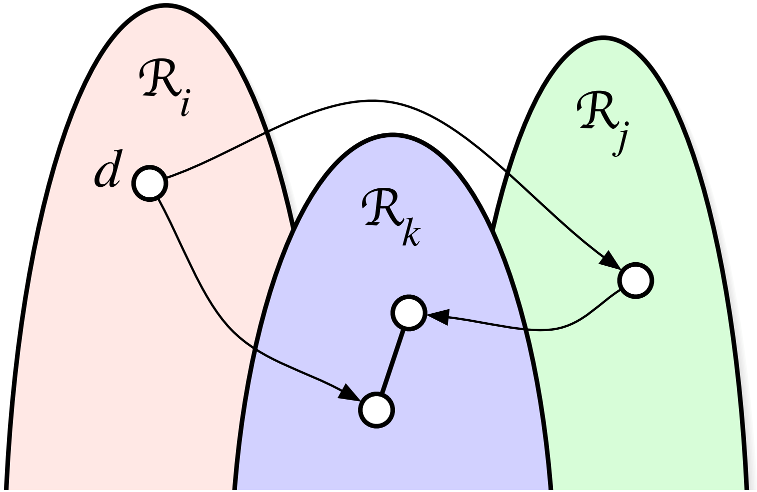
Définition du formalisme

Fonctions de transformation, Composition



Définition du formalisme

Fonctions de transformation, Composition



$$f_{k|i}(d) \leq_k f_{k|j} \circ f_{j|i}(d)$$

Définition du formalisme

Système de représentation

Il s'agit d'un triplet $\mathcal{S} = \left\langle \mathcal{I}, \{\mathcal{R}_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \{f_{i|j}\}_{i,j\in\mathcal{I}} \right\rangle$, où :

– $\mathcal{I}$ est un ensemble indexant les représentations.

– Les représentations $\mathcal{R}_i$ sont des ensembles partiellement ordonnés.

– Les fonctions de transformation $f_{i|j}$ vérifient :

Croissance	$d_1 \leq_j d_2 \Rightarrow f_{i\|j}(d_1) \leq_i f_{i\|j}(d_2)$
Identité	$f_{i\|i}(d) = d$
Composition	$f_{k\|i}(d_i) \leq_k f_{k\|j} \circ f_{j\|i}(d_i)$

Traduction logique

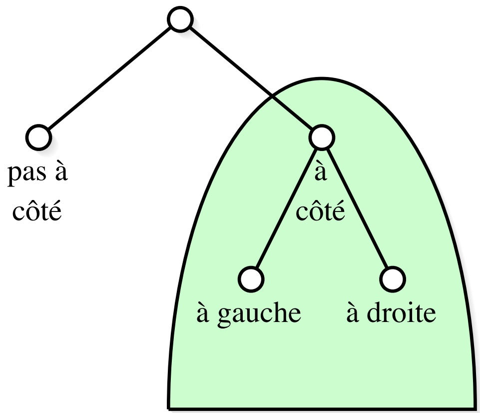
Représentation par un idéal

$$\varphi \rightsquigarrow [\![\varphi]\!]_i$$

Traduction logique

Représentation par un idéal

$$\varphi \rightsquigarrow [\![\varphi]\!]_i$$

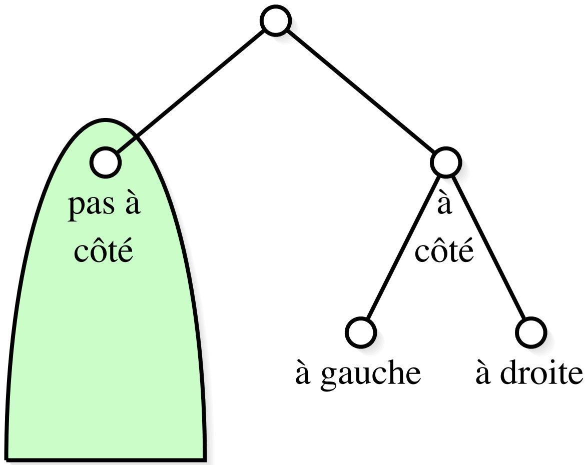


$$d \in [\![\varphi]\!]_i \text{ et } d' \leq_i d \Rightarrow d' \in [\![\varphi]\!]_i$$

Traduction logique

Définition structurelle

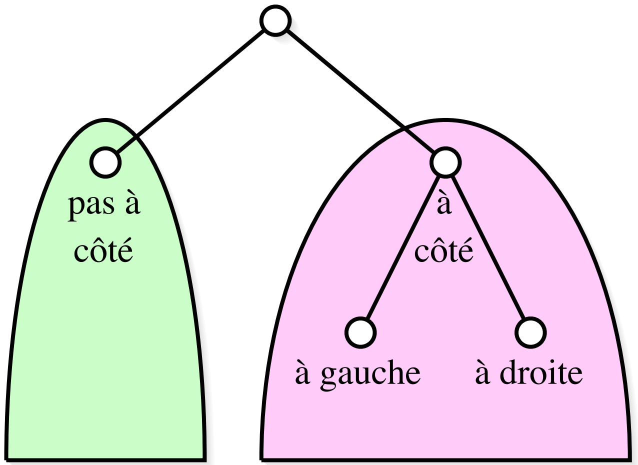
Exemple : Négation



Traduction logique

Définition structurelle

Exemple : Négation

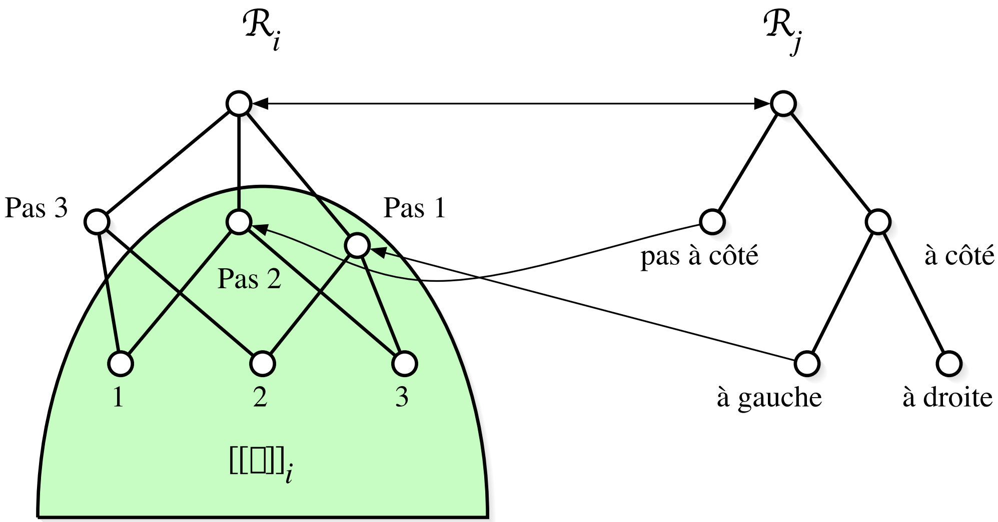


$$[\![\neg\varphi]\!]_i = \{d \mid \forall\, d' \leq d,\, d' \notin [\![\varphi]\!]_i\}$$

Traduction logique

Définition structurelle

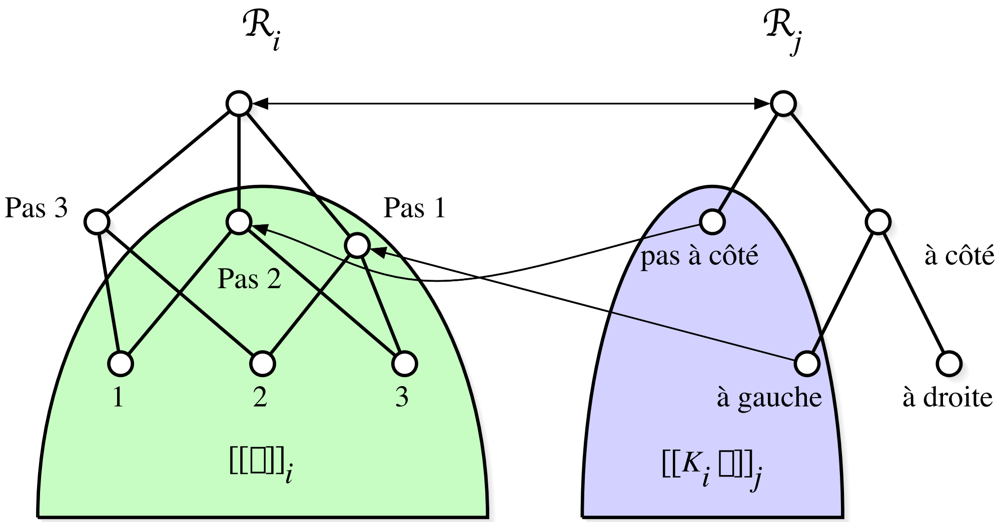
Exemple : Modalité



Traduction logique

Définition structurelle

Exemple : Modalité



$$[\![K_j\,\varphi]\!]_i = \{\, d \mid f_{j|i}(d) \in [\![\varphi]\!]_j \,\}$$

Traduction logique

Validité d'une proposition

$$\mathcal{S} \models_{\mathcal{S}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \forall i, [\![\varphi]\!]_i = \mathcal{R}_i$$

Traduction logique

Validité d'une proposition

$$\mathcal{S} \models_{\mathcal{S}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \forall\, i,\, [\![\varphi]\!]_i = \mathcal{R}_i$$

$$\models_{\mathcal{S}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \forall\, \mathcal{S},\; \mathcal{S} \models_{\mathcal{S}} \varphi$$

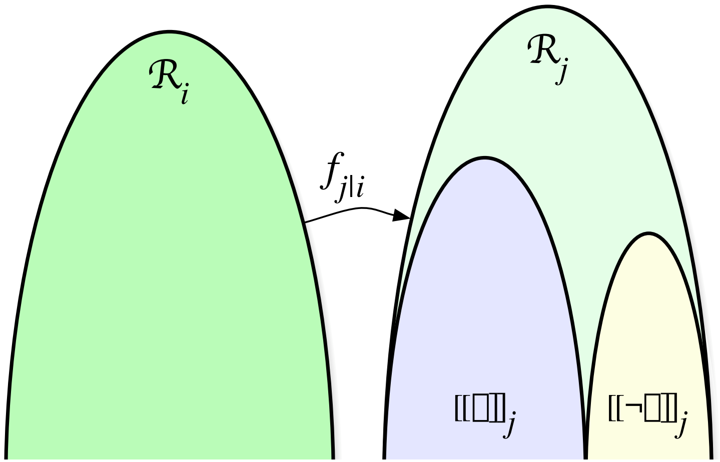
Troisième partie

La logique de l'observation

Axiomatisation

Exemple d'axiome valide

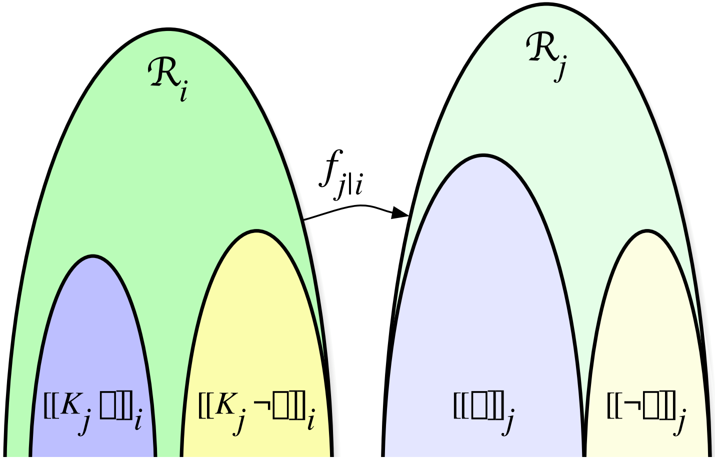
$\mathbf{D} : K_i\, \varphi \longrightarrow \neg K_i\, \neg\varphi$



Axiomatisation

Exemple d'axiome valide

$\mathbf{D} : K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_i\,\neg\varphi$



$$\models_{\mathcal{S}} \neg\,(K_j\,\varphi \wedge K_j\,\neg\varphi)$$

$$\models_{\mathcal{S}} K_j\,\varphi \rightarrow \neg K_j\,\neg\varphi$$

Axiomatisation

Définition de OL

Logique intuitionniste (**LI**), plus :

K	:	$K_i\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\psi$	Déduction
D	:	$K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_i\,\neg\varphi$	Consistance
KV	:	$K_i\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow K_i\,\varphi \vee K_i\,\psi$	
L	:	$K_i\,(\varphi \leftrightarrow K_i\,\varphi)$	Localisation
T$_2$	:	$K_i\,K_j\,\varphi \rightarrow K_j\,\varphi$	

$$\frac{\forall i,\ \vdash K_i\,\varphi}{\vdash \varphi}\,\textbf{Univ} \qquad \frac{\vdash \varphi}{\vdash K_i\,\varphi}\,\textbf{Nec}$$

Axiomatisation

Définition de OL

Logique intuitionniste (**LI**), plus :

K	:	$K_i\,(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow K_i\,\varphi \longrightarrow K_i\,\psi$	Déduction
D	:	$K_i\,\varphi \longrightarrow \neg K_i\,\neg\varphi$	Consistance
KV	:	$K_i\,(\varphi \vee \psi) \longrightarrow K_i\,\varphi \vee K_i\,\psi$	
L	:	$K_i\,(\varphi \leftrightarrow K_i\,\varphi)$	Localisation
$\mathbf{T_2}$	:	$K_i\,K_j\,\varphi \longrightarrow K_j\,\varphi$	

$$\frac{\forall i,\ \vdash K_i\,\varphi}{\vdash \varphi}\,\textbf{Univ} \qquad \frac{\vdash \varphi}{\vdash K_i\,\varphi}\,\textbf{Nec}$$

Théorème

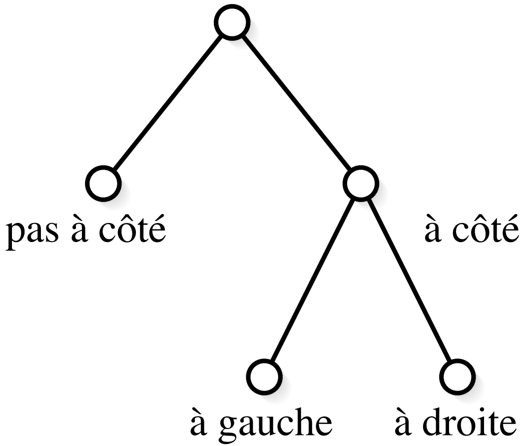
$$\forall \varphi,\ \models_{\mathcal{S}} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{\textbf{OL}} \varphi$$

Axiomes non valides

Le tiers-exclu

$$\nvdash_{\mathbf{OL}} \varphi \vee \neg\varphi$$

Exemple



Axiomes non valides

L'axiome 5

L'axiome **5** : $\neg K_i\,\varphi \longrightarrow K_i\,\neg K_i\,\varphi$ n'est pas valide pour **OL**.

Avec **OL**, il est équivalent à : $\neg K_i\,\varphi \longrightarrow K_i\,\neg\varphi$

Axiomes non valides

L'axiome 5

L'axiome **5** : $\neg K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\neg K_i\,\varphi$ n'est pas valide pour **OL**.

Avec **OL**, il est équivalent à : $\neg K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\neg\varphi$

Exemple

Un jeu de pile ou face, Alice lance la pièce et regarde le résultat sans le montrer à Bernard. Si c'est Pile, on a :

$$K_A\,\mathrm{Pile} \rightarrow \neg K_B\,\mathrm{Face}$$

Axiomes non valides

L'axiome 5

L'axiome **5** : $\neg K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\neg K_i\,\varphi$ n'est pas valide pour **OL**.

Avec **OL**, il est équivalent à : $\neg K_i\,\varphi \rightarrow K_i\,\neg\varphi$

Exemple

Un jeu de pile ou face, Alice lance la pièce et regarde le résultat sans le montrer à Bernard. Si c'est Pile, on a :

$$K_A\,\mathrm{Pile} \rightarrow \neg K_B\,\mathrm{Face} \rightarrow K_B\,\neg\mathrm{Face} \rightarrow K_B\,\mathrm{Pile}$$

Bernard a gagné de l'information sans rien faire.

Axiomes non valides

Pas de tiers-exclu (**LI**).

Pas l'axiome **5**.

La connaissance provient constructivement d'observations.

Crise de la connaissance

L'axiome T

L'axiome **T** : $K_i\,\varphi \longrightarrow \varphi$ n'est pas valide pour **OL**.

Rappel

$\mathbf{T_2}$: $K_i\,K_j\,\varphi \longrightarrow K_j\,\varphi$ et $\mathbf{L_T}$: $K_i\,(K_i\,\varphi \longrightarrow \varphi)$ sont valides.

Crise de la connaissance

L'axiome T

L'axiome **T** : $K_i\,\varphi \rightarrow \varphi$ n'est pas valide pour **OL**.

Rappel

$\mathbf{T_2}$: $K_i\,K_j\,\varphi \rightarrow K_j\,\varphi$ et $\mathbf{L_T}$: $K_i\,(K_i\,\varphi \rightarrow \varphi)$ sont valides.

Exemple

Système : la Terre a un instant donné.
Observations : l'heure qu'il est en un lieu donné.

Peut-on affirmer qu'il est 5 heures sur Terre ?

Crise de la connaissance

L'axiome **T** : $K_i\,\varphi \rightarrow \varphi$ n'est pas valide.

Que peut-on connaître par des observations ?

Quatrième partie

Esquisses de solutions

T est-il trop fort ?

L'axiome de confiance C

$$\mathbf{C} : K_i\, K_j\, \varphi \longrightarrow K_i\, \varphi$$

T est-il trop fort ?

L'axiome de confiance C

$$\mathbf{C} : K_i\, K_j\, \varphi \longrightarrow K_i\, \varphi$$

Ajouter **C** à **OL** entraîne :

$$\vdash K_i\, \varphi \leftrightarrow K_j\, \varphi$$

T est-il trop fort ?

L'axiome de consistance globale GD

$$\textbf{GD} : K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_j\,\neg\varphi$$

OL valide **D** : $K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_i\,\neg\varphi$.

T est-il trop fort ?

L'axiome de consistance globale GD

$$\mathbf{GD} : K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_j\,\neg\varphi$$

OL valide **D** : $K_i\,\varphi \rightarrow \neg K_i\,\neg\varphi$.

On peut avoir :

$$\vdash \neg(\text{“Il est 6 heures”} \wedge \text{“Il est 10 heures”})$$
$$\vdash K_1\,\text{“Il est 6 heures”}$$
$$\vdash K_2\,\text{“Il est 10 heures”}$$

T est-il trop fort ?

Comment relier la connaissance associée à deux représentations différentes ?

T est-il trop fort ?

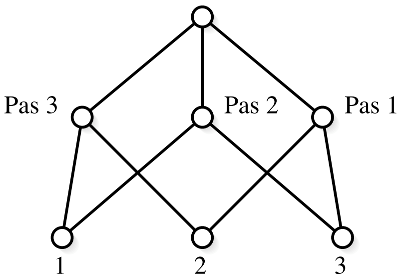
Comment relier la connaissance associée à deux représentations différentes ?

On peut utiliser $\mathbf{T_2}$: $K_i\, K_j\, \varphi \rightarrow K_j\, \varphi$.

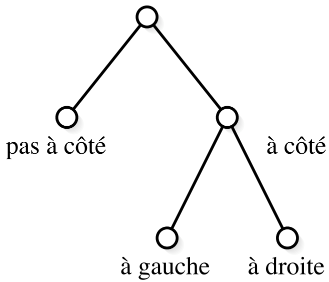
Localisation des propositions

$\mathrm{Loc}(\varphi)$: Représentations suffisamment expressives pour φ

Exemple



Représentation de *Céline*



Représentation de *Albert*

$$\text{Céline} \in \mathrm{Loc}(\textit{CélineEstEn3})$$
$$\text{Albert} \notin \mathrm{Loc}(\textit{CélineEstEn3})$$

Localisation des propositions

$\mathrm{Loc}(\varphi)$: Représentations suffisamment expressives pour φ

Condition

Si $i \in \mathrm{Loc}(\varphi)$, alors φ et $K_i\,\varphi$ sont équivalents.
On veut $\mathrm{Loc}(\varphi) = \mathrm{Loc}(\neg\varphi)$.

Localisation des propositions

$\mathrm{Loc}(\varphi)$: Représentations suffisamment expressives pour φ

Condition

Si $i \in \mathrm{Loc}(\varphi)$, alors φ et $K_i\,\varphi$ sont équivalents.
On veut $\mathrm{Loc}(\varphi) = \mathrm{Loc}(\neg\varphi)$.

Conséquence

Équivalence de $\neg K_i\,\varphi$ et $K_i\,\neg\varphi$ pour $i \in \mathrm{Loc}(\varphi)$.

Localisation des propositions

Bilan

L'axiome **T** redevient valide.

On perd la généralité et la flexibilité initiale :
– Condition supplémentaire sur les $f_{i|j}$.
– Localisation.

Objectivité

Ensemble **Obj** : $\{\varphi \mid \forall\, i,\ \vdash K_i\,\varphi \rightarrow \varphi\}$

Une proposition *objective* fournit son contexte.

Elle est donc *“hors contexte”* :

$$\varphi \in \textbf{Obj} \ \Leftrightarrow \ \vdash K_i\,K_j\,\varphi \rightarrow K_i\,\varphi$$

Objectivité

Ensemble **Obj** : $\{\varphi \mid \forall\, i,\ \vdash K_i\,\varphi \rightarrow \varphi\}$

Une proposition *objective* fournit son contexte.

Elle est donc *“hors contexte”* :

$$\varphi \in \mathbf{Obj} \;\Leftrightarrow\; \vdash K_i\,K_j\,\varphi \rightarrow K_i\,\varphi$$

Exemple

$$\begin{array}{rcl} \bot \in \mathbf{Obj} & \qquad & \mathbf{D} \;:\; K_i\,\bot \rightarrow \bot \\ K_i\,\varphi \in \mathbf{Obj} & \qquad & \mathbf{T_2} \;:\; K_i\,K_j\,\varphi \rightarrow K_j\,\varphi \end{array}$$

Conclusion

Systèmes de représentation

Structure générique basée sur :
– Descriptions vues de façon abstraite
– Fonctions de traduction de ces descriptions

Logique OL

– Logique modale intuitionniste
– Ni le tiers-exclu, ni **5**
– Pas l'axiome **T**

Objectivité

– Classe de propositions
– Hors-contexte

Conclusion

Perspectives

– Étude de l'objectivité, autres définitions.

– Ajout d'actions, de communication.

– Présence de la logique intuitionniste.

– Théorie sémantique de l'approximation.