UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue publiquement
le 29 octobre 2001
par

Henri BERTHOLON

UNE MODÉLISATION DU VIEILLISSEMENT

Jury

A. ANTONIADIS	Président du jury
M. CARBON	Rapporteur
J. DIEBOLT	Rapporteur
O. GAUDOIN	Examinateur
A. LANNOY	Examinateur
G. SAPORTA	Examinateur
G. CELEUX	Directeur de thèse

Remerciements

Au terme de cette aventure il m'est agréable de remercier :

Monsieur Gilles Celeux en tout premier lieu, pour m'avoir accueilli dans son équipe où j'ai trouvé un climat particulièrement stimulant. De plus j'ai beaucoup apprécié sa disponibilité à mon égard, ses encouragements constants et ses conseils judicieux. Pour tout cela je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Monsieur Anestis Antoniadis pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ma thèse.

Messieurs Michel Carbon et Jean Diebolt, pour avoir accepté de juger ce travail et parce que, en me communiquant leur goût de la recherche, ils m'invitent à poursuivre dans cette voie.

Monsieur Olivier Gaudoin pour avoir suivi de très près mon travail depuis le début et pour ses nombreuses remarques pertinentes.

Monsieur André Lannoy pour avoir initié le sujet de cette thèse et m'avoir fait partager sa riche expérience du monde industriel.

Monsieur Gilbert Saporta pour avoir facilité mon travail de recherche. Par ailleurs, à mes yeux, son dynamisme hors du commun a eu valeur d'exemple.

Monsieur Alain Monfort pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée sur un point de la thèse. En outre, ayant eu la chance de suivre ses cours, je souhaite dire ici le sentiment de beauté et de perfection intellectuelle qui se dégagent de ses exposés.

Mes remerciements chaleureux vont enfin aux membres du projet IS2 ainsi qu'à mes collègues du CNAM, particulièrement à Mademoiselle Laurence Tricot qui m'a fait rencontrer Gilles et qui est donc à l'origine de cette thèse.

Table des matières

Présentation générale

De nos jours la sûreté de fonctionnement est devenue une préoccupation majeure dans la plupart des domaines industriels. En effet, les risques techniques qui peuvent mettre en cause la fiabilité, la disponibilité ou la sécurité d'un matériel ou d'une installation doivent être maîtrisés. Des activités de maintenance se développent donc, avec pour mission de garantir le bon fonctionnement des systèmes tout en assurant la sécurité des personnes et des biens et en préservant l'environnement. Elles sont centrées sur les opérations nécessaires d'entretien, de réparation, de rénovation et d'amélioration. Mais cela doit se faire sous une double contrainte de performance et de moindre coût. Une maintenance optimale est donc nécessairement liée à une analyse du retour d'expérience en profondeur. Ceci explique donc la place croissante donnée aux méthodes développées par la théorie de la fiabilité dont l'objectif est d'analyser la probabilité de défaillance d'un système. Ici le terme "système" est à prendre dans un sens très général et désigne aussi bien un composant électronique qu'une centrale nucléaire. On conçoit donc tout l'intérêt porté à ce que l'on appelle l'analyse statistique des durées de vie. L'observation de l'évolution des pannes d'un système y joue un rôle prépondérant et permet d'obtenir des informations exploitables statistiquement. L'étape modélisation est alors souvent nécessaire pour tirer un profit maximum de l'expérience. Notamment une caractéristique très importante à examiner est l'évolution du taux de défaillance d'un système et particulièrement la détection en temps voulu de son vieillissement. Il existe déjà de nombreuses modélisations du vieillissement dont la plus connue est la loi de Weibull. Elle a le mérite d'être simple mais comporte deux inconvénients importants :

- elle oblige le vieillissement du matériel à démarrer dès le début de son fonctionnement.
- elle ne tient pas compte du caractère accidentel d'une défaillance qui peut dépendre d'une cause extérieure.

Cette thèse propose de remédier à ces défauts juste évoqués et de manière plus générale d'aborder le problème du vieillissement d'un matériel. Ceci, afin de permettre d'exploiter au mieux les données réelles du retour d'expérience.

On sera donc amené à étudier, pour un matériel prenant de l'âge, une modélisation particulière de son vieillissement. Notre modèle suppose un taux (ou une intensité) de défaillance constant au départ (qui traduit la cadence des défaillances accidentelles) puis l'apparition d'un taux de défaillance croissant (ce qui signifie vieillissement) à partir d'un instant, qui doit être déterminé sur la base des données de retour d'expérience collectées et validées pour ce matériel (données de défaillance, de maintenance préventive et de fin d'observation).

Notre étude débute par la mise en évidence du contexte industriel dans lequel nous nous sommes situés au départ. Nous sommes alors amenés à distinguer tout de suite deux types fondamentaux de données liés en fait à deux classes de matériels : les réparables et les non réparables. On consacre la fin de ce premier chapitre à la présentation des modèles probabilistes sous-jacents, notamment la loi exponentielle et le processus de Poisson homogène, qui constituent la base de la modélisation en fiabilité et qui correspondent à une absence de vieillissement.

Le deuxième chapitre présente des tests classiques de l'exponentialité et du caractère homogène d'un processus de Poisson, autrement dit nous rappelons les techniques usuelles pour juger d'un vieillissement du matériel, c'est-à-dire savoir s'il y a croissance ou constance d'une intensité de défaillance ou d'un taux de défaillance. Nous en profitons alors pour approfondir le test spécifique contre une alternative Weibull, en développant une approche bayésienne non informative. Nous avons choisi au départ cette orientation pour tenir compte de la faiblesse des tailles d'échantillon couramment rencontrée dans la pratique. Toutefois, les résultats obtenus ne permettent pas de surpasser les méthodes classiques. On pouvait s'y attendre car nous n'utilisons pas d'information a priori obtenue par expertise.

Nous présentons ensuite notre nouveau modèle de vieillissement défini, rappelons-le, dans l'optique de pouvoir estimer l'instant de début de vieillissement du matériel. Cette présentation fait l'objet des deux chapitres suivants dévolus l'un aux matériels non réparables et l'autre aux matériels réparables. Une procédure d'estimation utilisant l'algorithme EM est notamment proposée dans les deux cas et nous prouvons l'existence d'une solution convergente de l'équation de vraisemblance dans le cas d'un matériel non réparable. De plus, des simulations illustrent les bonnes performances de notre procédure d'estimation. Nous proposons ensuite un test de l'existence du vieillissement, pour lequel nous montrons que la loi de la variable de décision sous H_0 est indépendante du paramètre. Ces deux chapitres développent des procédures statistiques très proches car les vraisemblances de ces deux modèles se ressemblent, bien que les univers mathématiques de départ soient très différents dans les deux cas. Néanmoins, ces deux chapitres ont été rédigés de telle façon qu'ils peuvent être lus indépendamment.

Enfin, un dernier chapitre est consacré à quelques applications réelles de notre modèle. Elles sont basées sur des échantillons de données fournies par EDF, qui concernent des matériels du secteur nucléaire. Finalement, la dernière application concerne un tout autre domaine puisqu'il s'agit de l'analyse d'une table de mortalité classique par le biais de notre modélisation.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le contexte industriel

On peut distinguer deux types de vieillissement, dépendant des composants considérés :

- les composants mécaniques (souvent des composants actifs) et électroniques, dont la durée de vie est courte ; leur vieillissement est généralement estimé à partir des données de défaillance ; le management du cycle de vie fait en sorte que les tâches de maintenance sont efficaces ;
- les composants, comme les structures passives ou les câbles électriques ou d'autres, à durée de vie longue, qui n'ont pas à proprement parler de programme de maintenance et qui sont conçus, dès l'origine, pour la durée de vie de l'installation avec un coefficient de sécurité suffisant ; l'information à traiter est essentiellement constituée de données de surveillance ou d'inspection.

Dans les deux cas, une analyse qualitative puis une analyse quantitative sont nécessaires afin d'évaluer le vieillissement. L'indicateur de fiabilité souvent utilisé pour la première catégorie de composants à vie courte est le taux de défaillance (ou l'intensité de défaillance), déterminé à partir des données historiques des maintenances corrective ou préventive.

Avant d'aborder les aspects quantitatifs, il faut rappeler que la première des tâches, qui est difficile, consiste à valider les fiches de dégradation et de défaillance :

- différencier les défaillances réelles des événements à caractère humain, des erreurs de maintenance ;

- étudier les défaillances, valider l'analyse logique, le mode et la cause physique des défaillances ;

- analyser les causes et les conséquences des défaillances et examiner dans le détail celles qui semblent relever d'un vieillissement ;

- compléter les éventuelles données manquantes, sans oublier les durées de fonctionnement, distinguer et expliquer les éventuelles données singulières.

C'est seulement après cette analyse qualitative, que l'on aborde l'analyse quantitative. Il est important d'identifier d'éventuelles croissances du taux de défaillance, de décider l'instant de début de cette croissance, de mesurer la cinétique de vieillissement. Une analyse quantitative doit donc s'assurer de la (non) constance d'un taux de défaillance et identifier les éléments importants d'un tel problème :

- le taux de défaillance supposé constant du matériel suivi, soit $1/\eta_0$, avant tout vieillissement ;

- l'instant t_0 de début du vieillissement, à partir duquel le taux de défaillance va croître ;

- le paramètre de forme β (de la loi de Weibull modélisant la fiabilité), traduisant la cinétique du phénomène de vieillissement ainsi que le nouveau paramètre d'échelle η_1.

Cette thèse est consacrée au traitement de ces questions. Elle se focalise sur les composants “à vie courte”, pour lesquels le vieillissement s'estime à partir des données du retour d'expérience technique. On entrevoit tout de suite les applications potentielles, lorsqu'il s'agit d'analyser un retour d'expérience et d'élaborer un bilan de fonctionnement, de déterminer l'évolution des paramètres de fiabilité d'un matériel (par exemple les paramètres de sûreté), d'actualiser une analyse OMF d'optimisation de la maintenance par la fiabilité ou de calculer la durabilité.

Il faut cependant insister sur deux problèmes très réels :

- généralement un faible nombre de données est disponible ; le plus souvent on dispose de données de plusieurs composants, d'un même type, installés dans des tranches différentes,

- l'hypothèse aussi bon que neuf généralement admise lorsqu'il s'agit de qualifier l'état d'un matériel juste après une opération de maintenance ; hypothèse qui est tout à fait adaptée aux matériels non répararables, mais moins justifiée pour des matériels réparables.

1.2 Types de données

Avant de présenter les différentes techniques statistiques pour analyser l'évolution du taux de défaillance, il est indispensable de distinguer nettement les deux grands types de données rencontrés lors de l'observation de données réelles de retour d'expérience. En effet, ces deux types de données sont modélisés mathématiquement de manière complètement différente.

Dans un premier temps on considérera des données provenant de matériels non réparables pour lesquelles le cadre de l'échantillonnage classique est parfaitement adapté. Ensuite, on examinera le cas des données observées sur des matériels réparables qui requiert la théorie des processus aléatoires et notamment les processus de Poisson.

1.2.1 Matériels non réparables

Un matériel est non réparable s'il est jeté au rebut dès sa défaillance. C'est souvent un composant ou une petite partie d'un système ou d'un matériel plus complexe (le composant est échangeable).

En termes mathématiques, la durée de vie d'un matériel non réparable est une variable aléatoire dont la loi est définie sur $I\!R^+$ et caractérisée par une densité notée $f(x)$ et un taux de défaillance noté $h(x)$ (aussi appelé dans la documentation anglosaxonne taux de hasard).

On observe généralement un ensemble de n matériels non réparables, identiques et exploités dans des conditions similaires. Leurs durées de vie sont notées respectivement $X_1, X_2, ..., X_n$.

$(X_1, X_2, ..., X_n)$ constituent donc un échantillon de la loi de X, c'est-à-dire que les X_i ont toutes mêmes lois et sont indépendantes. On notera l'échantillon ordonné (de manière croissante) :

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}).$$

Malheureusement, dans un contexte industriel, la plupart du temps, les données sont censurées et les censures peuvent être différentes. Ceci rend évidemment les procédures d'estimation et de test statistique plus compliquées.

Le cas particulier où le taux de défaillance est constant (noté par exemple $\frac{1}{\eta}$) conduit à la loi exponentielle de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\eta} \times e^{-\frac{1}{\eta}x}$$

Une propriété classique des échantillons provenant de la loi exponentielle est la suivante (cf. [15] p429) :

Théorème 1.1 *Soit $(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$ un échantillon ordonné de la loi exponentielle. Notons $(X'_1, X'_2, ..., X'_n)$ l'échantillon des "espaces normalisés" :*

$$X'_1 = nX_{(1)} \text{ et } X'_i = (n+1-i)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \text{ pour } i = 2, ..., n.$$

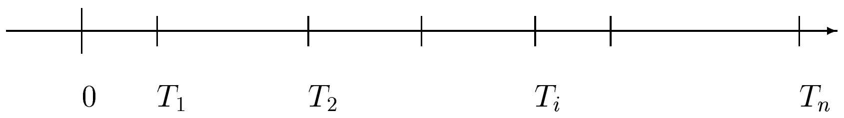
On montre alors que cet échantillon est lui aussi constitué de variables *aléatoires indépendantes de loi exponentielle ayant le même paramètre que la loi exponentielle associée à la loi des X_i de départ.*

Cette propriété sera exploitée plusieurs fois dans la suite.

1.2.2 Matériels réparables

Précisons d'abord qu'un matériel réparable concerne un système qui peut subir, au cours de sa vie, plusieurs défaillances, celles-ci ne touchant généralement qu'une partie du système et étant donc réparables.

On notera $T_1, T_2, ..., T_n$ les instants (aléatoires) successifs des défaillances. Les T_i peuvent être représentés sur un axe des temps comme suit :



Le modèle mathématique utilisé pour décrire ces défaillances successives est souvent un processus de Poisson. Rappelons que la loi d'un processus est caractérisée par son intensité $\lambda(t)$ qui, dans le cas où elle ne dépend pas du passé du processus, est une fonction définie par
$\lambda(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} P(N_{t+dt} - N_t = 1)$ où N_t compte le nombre de défaillances survenues dans l'intervalle [0,t].

On peut aussi montrer que $\lambda(t) = \frac{d}{dt} E(N_t)$ qui permet donc d'interprèter $\lambda(t)$ comme le nombre moyen de défaillances observées pendant une unité de temps.

Cette intensité de défaillance $\lambda(t)$, indépendante du passé du processus, caractérise la loi d'un processus de Poisson et ne doit surtout pas être confondue avec un taux de défaillance qui caractérise, lui, la loi d'une variable aléatoire réelle.

Voici trois propriétés primordiales des processus de Poisson :

- si l'on définit $N(a,b)$ comme étant le nombre de défaillances survenues dans l'intervalle $[a,b]$, alors $N(a,b)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\int_a^b \lambda(t)dt$;

- pour deux intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ qui ne se recouvrent pas, $N(a,b)$ et $N(c,d)$ sont deux variables indépendantes ;

- la vraisemblance des données (ici les n instants de défaillances réellement observés, notés $t_1, t_2, ..., t_n$) s'écrit :

$$L = \left[\prod_{i=1}^{n} \lambda\left(t_i\right)\right] e^{-\int\limits_0^{t_n} \lambda(t)dt}.$$

Par la suite, le processus des défaillances observées sur un matériel réparable sera toujours modélisé par un processus de Poisson. Dans un contexte industriel, on considère que les matériels ont souvent une tendance à vieillir, ce qui conduit à une intensité de défaillance croissante. Un exemple classique est le Processus de Weibull qui tire son nom de la forme de son intensité $\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1}$. Cette fonction est identique au taux de défaillance de la loi de Weibull. Il ne faut toutefois pas en conclure que tous les temps inter-défaillances suivent une loi de Weibull (seul le premier instant de défaillance, T_1, suit une vraie loi de Weibull).

Dans le cas où il n'y a pas de vieillisement, l'intensité est constante à un niveau λ qui traduit la cadence des défaillances survenant accidentellement. On parle alors de processus de Poisson homogène. Voici, pour terminer, deux propriétés remarquables (en plus de celles notées ci-dessus) associées au processus de Poisson homogène (λ constant) :

- notant les temps inter-défaillances $X_i = T_i - T_{i-1}$, on montre que les X_i sont indépendants et de même loi exponentielle de paramètre λ ;

- les instants de défaillances $T_1, T_2, ..., T_n$ se répartissent uniformément dans l'intervalle d'observation $[0,T]$, plus exactement on montre que la loi conditionnelle (sachant n) du vecteur ($T_1, T_2, ..., T_n$) est celle de la statistique d'ordre de la loi uniforme ; il existe également une version légèrement différente de cette propriété qui permet de dire que $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ se répartissent aussi uniformément dans l'intervalle $[0, T_n]$.

Chapitre 2

Quelques tests d'exponentialité et tests d'un processus de Poisson homogène

2.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de faire un rapide tour d'horizon des méthodes classiques pour juger de la constance d'un taux de défaillance (ou d'une intensité pour le cas d'un matériel réparable). Dans le cas d'un matériel non réparable il s'agit de tester l'exponentialité (c'est l'objet de la section suivante), tandis que, dans le cas d'un matériel réparable, on souhaite tester si le processus de Poisson est homogène (cadence constante). Ce second cas sera traité dans la section 2.4 .
Auparavant, dans la foulée des tests classiques de l'exponentialité, nous proposons dans la section 2.3 une approche bayésienne non informative pour le cas particulier d'un test de la loi exponentielle contre la loi de Weibull.

2.2 Quelques tests classiques d'exponentialité

Tester l'hypothèse de constance du taux de défaillance pour un matériel non réparable revient à tester si la loi de la durée de vie du matériel X est exponentielle.

On présente tout d'abord des tests d'exponentialité généraux basés sur la fonction de répartition empirique : ce sont les tests du type Kolmogorov-Smirnov et des procédures graphiques classiques. Ensuite, on examine un test fondé sur la transformation TTT (Temps Total en Test), puis on présente le cas d'une alternative Gamma et celui d'une alternative Weibull.
La forme générale de ces tests est la suivante :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{F a la forme exponentielle : } 1 - e^{-\frac{1}{\eta}x}, \\ H_1 : & \text{F n'a pas la forme exponentielle.} \end{cases}$$

2.2.1 Tests du type Kolmogorov-Smirnov

On note F la fonction de répartition de la loi de X et F_n la fonction de répartition empirique (c'est-à-dire déterminée à partir de l'échantillon). Il existe alors différentes mesures de l'écart entre F et F_n qui peuvent être utilisées dans un test d'adéquation. Les trois tests les plus classiques, dont les valeurs critiques sont tabulées dans [15], reposent sur :

- $D = \sup |F_n(x) - F(x)|$.
  C'est la statistique de Kolmogorov.
- $W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 \, dF(x)$. W^2 est la statistique de Cramer-von-Mises.
- $A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 \, \psi(x) dF(x)$ avec la fonction de pondération $\psi(x) = [(F(x))(1 - F(x))]^{-1}$.

A^2 est la statistique d'Anderson-Darling.

De manière générale, W^2 et A^2 sont préférables à D. De plus, on constate que W^2 est efficace pour détecter un écart au centre de la distribution tandis que A^2 est plus efficace pour les queues de distribution (cf. [35] p 438).

Le test de Cramer-von-Mises

On se place dans le cadre de données censurées à droite. La censure est notée C, r est le nombre de défaillances réellement observées et $n-r$ est le nombre de censures. Le paramètre η, inconnu, qui figure dans la fonction de répartition exponentielle, est estimé par la méthode du Maximum de Vraisemblance. On obtient

$$\hat{\eta} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)C\right)}{r}.$$

L'échantillon $(X_1, X_2, ..., X_r, C....C)$ est d'abord transformé par la fonction de répartition exponentielle F estimée (car on se ramène alors au cas de la loi uniforme). On construit donc l'échantillon $\left(Z_{1,...}, Z_r, Z_{(r+1)}\right)$ où

$Z_{(i)} = 1 - e^{-\left(\frac{X_{(i)}}{\hat{\eta}}\right)}$ pour $i = 1, ..., r$,

$Z_{(r+1)} = 1 - e^{-\left(\frac{C}{\hat{\eta}}\right)}$.

La statistique de Cramer-von-Mises se calcule par la formule :

$W^2 = \sum_{i=1}^{r+1} \left(Z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 + \frac{r+1}{12n^2} + \frac{n}{3}\left(Z_{(r+1)} - \frac{r+1}{n}\right)^3$

Lorsque W^2 est trop grand, l'hypothèse d'exponentialité est rejetée. La valeur critique asymptotique est lue dans la table 4.4 p112 [15].

2.2.2 Les graphes de probabilité

Ce sont des procédures qui permettent de vérifier graphiquement la forme d'une fonction de répartition en utilisant des relations simples qui peuvent exister entre $F(x)$ et x. On examine le cas exponentiel mais aussi le cas de la loi de Weibull, un peu plus général.

Le modèle exponentiel

Pour ce modèle, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\eta}}$.
Donc $\ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right) = \frac{x}{\eta}$.
On note $p_i = F_n(x_{(i)}) = \frac{i-c}{n-2c+1}$ où c est un facteur correctif.
En reportant sur un graphique les points $\left(x_{(i)}, \ln\left(\frac{1}{1-p_i}\right)\right)$, on examine alors s'ils s'alignent autour d'une droite passant par l'origine.

Remarque 1 *Le choix $c = 0.3$, qui correspond à la norme CEI cf. [11], se traduit par la formule :*

$$\ln\left(\frac{n+0.4}{n-i+0.7}\right) = \frac{x_{(i)}}{\eta}.$$

Le modèle de Weibull

Ici $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$, d'où $\ln\left(-\ln\left(1 - F(x)\right)\right) = \beta\left(\ln(x) - \ln(\eta)\right)$.
Le graphe de probabilité est obtenu en reportant les points de coordonnées $\left(\ln\left(x_{(i)}\right), \ln\left(-\ln\left(1 - p_i\right)\right)\right)$. On juge alors de l'existence d'une relation linéaire et la pente de la droite ajustée donne une estimation de β.

Remarque 2 *Dans le cas de censures multiples, on utilise généralement l'estimateur de Kaplan-Meier qui s'exprime de la manière suivante :*

$$p_i^{KM} = 1 - \prod_{\substack{j\in S\\ j\leq i}} \frac{n-j}{n-j+1}$$

où S est l'ensemble des indices qui correspondent à des défaillances réelles.

2.2.3 Le graphe TTT

Cette procédure utilise une propriété classique de la loi exponentielle. Commençons par ordonner l'échantillon des données censurées à droite par

C :

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(r)} \leq C$$

On note T_i, le Temps Total en Test (TTT) jusqu'à la i-ème défaillance observée, qui est donc égal à :

$$T_i = \sum_{k=1}^{i} X_{(k)} + (n-i)\, X_{(i)} \quad \text{pour } i = 1, 2, ..., r.$$

Une autre écriture des T_i donne :

$$T_i = nX_{(1)} + (n-1)\left(X_{(2)} - X_{(1)}\right) + ... + (n-i+1)\left(X_{(i)} - X_{(i-1)}\right).$$

Ceci montre que les T_i sont les sommes des espaces normalisés dont il a déjà été question au premier chapitre. Nous avons vu alors que ces espaces normalisés suivaient des lois exponentielles identiques et indépendantes. Les T_i peuvent donc s'interpréter comme des instants d'apparition d'un évènement dans un processus de Poisson homogène. Ils se répartissent donc uniformément.

Par conséquent, en définissant $U_{(i)} = \frac{T_i}{T_r}$ pour $i = 1, ..., r-1$, sous H_0 (hypothèse d'exponentialité) les $U_{(i)}$ constituent un échantillon ordonné de taille $r-1$ de la loi uniforme sur [0,1]. Cette uniformité peut donc être testée, par exemple en utilisant la variable de décision suivante :

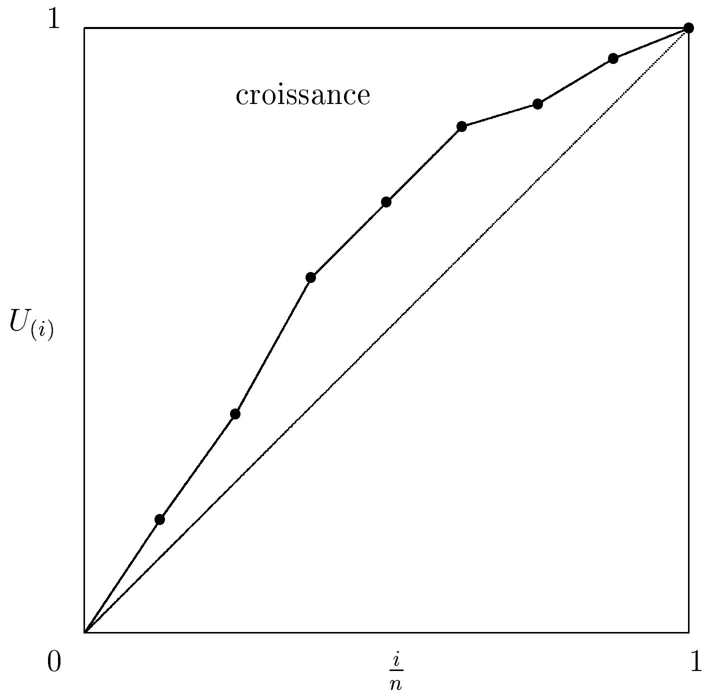
$$V = -2 \sum_{i=1}^{r-1} \ln\left(U_{(i)}\right)$$

qui , sous H_0 , suit une loi du Khi-deux à $2\,(r-1)$ degrés de liberté.

Si V est trop grand, cela signifie que le taux de défaillance décroît.

Si V est trop faible, cela signifie que le taux de défaillance croît.

Une procédure graphique peut compléter ce test. Il suffit de reporter les points de coordonnées $\left(\frac{i}{n}, U_{(i)}\right)$ et d'apprécier la courbe obtenue par rapport à la diagonale.



Interprétation de la courbe $(\frac{i}{n}, U_{(i)})$

- Une courbe proche de la diagonale traduit la constance du taux de défaillance.
- Une courbe au-dessus de la diagonale signifie la croissance du taux de défaillance.
- Une courbe au-dessous de la diagonale prouve au contraire la décroissance du taux de défaillance.

Remarque 3 *En anticipant sur le chapitre suivant, on peut remarquer qu'une analyse de cette courbe peut permettre parfois de détecter un instant de vieillissement d'un matériel. En effet, si la courbe démarre linéairement au-dessus de la diagonale jusqu'à un certain point puis au-delà s'infléchit rapidement pour regagner le sommet du carré, cela traduit l'exponentialité des données jusqu'à ce point puis ensuite le vieillissement du matériel.*

2.2.4 Test contre une alternative Gamma

La densité de la loi gamma s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\eta^p \Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\frac{x}{\eta}} \text{ pour } x \geq 0.$$

Il s'agit de tester :

$$\begin{cases} H_0 : p = 1 \text{ (comportement exponentiel)} \\ H_1 : p > 1 \text{ (vieillissement)} \end{cases}$$

D'après un article de Shorack (cf. [50]) la région critique optimale existe et se présente sous la forme :

$$W = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\overline{X}} \right) \geq K \right\}$$

2.2.5 Test contre une alternative Weibull

Rappelons d'abord la densité de la loi de Weibull :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta}} \text{ pour } x \geq 0.$$

On teste alors les deux hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 1 \\ H_1 : \beta > 1 \end{cases}$$

La procédure classique est basée sur le rapport de vraisemblance $\frac{L(\hat{\beta}, \hat{\eta})}{L(1, \tilde{\eta})}$ ou directement sur l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$.

Remarquons que la statistique précédente $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\overline{X}} \right)$ semble obtenir aussi de bons résultats (cf. [15]).

2.3 Un test bayésien non informatif contre une alternative Weibull

2.3.1 Introduction

Nous souhaitons ici présenter une approche bayésienne non informative du test bilatéral d'une loi exponentielle contre une loi de Weibull :

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 1 & (\text{ modèle Exponentiel }) \\ H_1 : \beta \neq 1 & (\text{ modèle Weibull }) \end{cases}$$

En effet, dans le domaine industriel, les données sont souvent peu nombreuses et très censurées. Nous souhaitons alors bénéficier de l'effet régularisant de l'optique bayésienne.

Rappelons tout d'abord que la vraisemblance d'un échantillon de la loi de Weibull, censuré, $D = (x_1, \ldots, x_r, C, \ldots, C)$ s'écrit :

$$L(\eta, \beta) = \beta^r (\frac{1}{\eta})^{r\beta} (\prod_{i=1}^{r} x_i)^{\beta - 1} e^{-\sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{\eta})^\beta}$$

Choix de l'a priori

L'application de la règle de Jeffreys donne les deux lois a priori non informatives suivantes :

$$\begin{array}{ll} \pi(\eta, \beta) \propto \frac{1}{\eta} & (\text{pour le modèle Weibull }) \\ \pi(\eta) \propto \frac{1}{\eta} & (\text{pour le modèle Exponentiel }) \end{array}$$

Calcul de la vraisemblance intégrée en η, notée $L_W(\beta)$

$$\begin{aligned}
L_W(\beta) &= \int_0^{\infty} L(\eta,\beta)\frac{1}{\eta}\,d\eta \qquad \text{(pour le modèle Weibull)} \\
&= \beta^{r-1}\,(r-1)!\,\frac{(\prod_{i=1}^{r} x_i)^{\beta-1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta})^{r}} \\
L_E &= L_W(1) \;=\; (r-1)!\,\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^{r}} \qquad \text{(pour le modèle Exponentiel)}
\end{aligned}$$

Calcul du facteur de Bayes

$$\begin{aligned}
B_{WE} &= \frac{P(D/W)}{P(D/E)} \\
&= \frac{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} L(\eta,\beta)\pi(\eta,\beta)\,d\eta\,d\beta}{\int_0^{\infty} L(\eta,1)\pi(\eta)\,d\eta} \\
&= \frac{\int_0^{\infty} L_W(\beta)\,d\beta}{L_E} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{L_W(\beta)}{L_E}\,d\beta
\end{aligned}$$

B_{WE} est difficilement interprétable car la loi a priori sur β est impropre (en fait constante égale à 1), mais dépend principalement du rapport des 2 vraisemblances intégrées en η, à savoir : $\frac{L_W(\beta)}{L_E}$.

2.3.2 Étude d'une région critique

Définition

Suite à la remarque qui vient d'être faite sur le facteur de Bayes, il semble intéressant de définir une règle de décision directement à partir du rapport $\frac{L_W(\beta)}{L_E}$.
Cette règle de décision peut s'énoncer comme suit :

Un échantillon conduit à rejeter le modèle Exponentiel si :

$$P(\frac{L_W(\beta)}{L_E} > 1/D) \geq 90\%$$

Calcul de $P(\frac{L_W(\beta)}{L_E} > 1/D)$

1 En vue d'effectuer ce calcul, il est d'abord nécessaire de connaître la loi de β /D :

$$\begin{aligned}
\pi(\beta/D) &\propto \pi(\beta, D) = \int_0^\infty \pi(\eta, \beta, D)\, d\eta \\
&\propto \int_0^\infty L(\eta, \beta)\pi(\eta, \beta)\, d\eta \\
&\propto \int_0^\infty L(\eta, \beta)\frac{1}{\eta}\, d\eta \\
&\propto \text{Ł}_W(\beta)
\end{aligned}$$

Donc $\pi(\beta/D) = \frac{L_W(\beta)}{\int_0^\infty L_W(\beta)\, d\beta}$

2 Ensuite,

$$\begin{aligned}
P(\frac{L_W(\beta)}{L_E} > 1/D) &= \int_{\{\frac{L_W(\beta)}{L_E}>1\}} \pi(\beta/D)\, d\beta \\
&= \frac{\int_{\{\frac{L_W(\beta)}{L_E}>1\}} L_W(\beta)\, d\beta}{\int_0^\infty L_W(\beta)\, d\beta} \\
&= \frac{|\int_1^{\beta_0} L_W(\beta)\, d\beta|}{\int_0^\infty L_W(\beta)\, d\beta} \\
&= \frac{|\int_1^{\beta_0} \frac{L_W(\beta)}{L_E}\, d\beta|}{\int_0^\infty \frac{L_W(\beta)}{L_E}\, d\beta}
\end{aligned}$$

Rq1 : En fait, pour tout échantillon D, la fonction $\frac{L_W(\beta)}{L_E}$ est de forme unimodale. Elle est égale à 1 en $\beta = 1$ et en une deuxième valeur notée β_0 . Dans la suite, nous notons b la valeur de β qui rend maximum $\frac{L_W(\beta)}{L_E}$.

Rq2 : Géométriquement, un échantillon D conduit à rejeter le modèle Exponentiel si la surface comprise entre 1 et β_0 représente plus de 90% de la surface totale. De plus, l'aire totale s'interprète comme le facteur de Bayes B_{WE} .

Rq3 : D'après des résultats de simulation, il semblerait que la loi de la variable aléatoire $\varphi(D) = P(\frac{L_W(\beta)}{L_E} \geq 1/D)$ suive une loi uniforme sur [0,1], sous H_0. Ceci donnerait un risque α exactement égal à 10%.

2.3.3 Comparaison par simulation avec d'autres régions critiques

Définitions d'autres régions critiques

Les régions critiques classiques suivantes permettent de tester nos 2 hypothèses :
- la région critique optimale de Neyman-Pearson (si l'on connaît la valeur alternative de β)
- le test du rapport de vraisemblance
- la région critique basée sur l'EMV de β, noté $\hat{\beta}$

Nous définissons également deux autres régions critiques basées l'une sur b (valeur qui maximise $L_W(\beta)$) et l'autre sur le facteur de Bayes B_{WE} .
Afin de pouvoir comparer toutes ces régions critiques entre elles, nous avons déterminé les différentes valeurs critiques qui correspondent au même risque α que celui de notre région critique. Ceci a été réalisé à partir de 100000 simulations d'un échantillon de la loi exponentielle (avec un paramètre η fixé à 100) de taille n=10 et censuré par C=100 .

Voici les résultats :

Tout d'abord, l'estimation du risque α correspondant à notre région critique est égale à 10,1%.
Ceci détermine ensuite complètement les régions critiques qui viennent d'être définies :

- $W_{NP(\beta=0.7)} = \{\frac{L_{H_1}(\eta=100,\beta=0.7)}{L_{H_0}(\eta=100,\beta=1)} \geq 1.9253\}$

- $W_{NP(\beta=1.3)} = \{\frac{L_{H_1}(\eta=100,\beta=1.3)}{L_{H_0}(\eta=100,\beta=1)} \geq 1.9933\}$

- $W_{RV} = \{\frac{L_{H_1}(\hat{\eta},\hat{\beta})}{L_{H_0}(\tilde{\eta},\beta=1)} \geq 4.1611\}$

- $W_{MV} = \{\hat{\beta} \leq 0.6046$ ou $\geq 2.0961\}$

- $W_b = \{b \leq 0.5009$ ou $\geq 1.8213\}$

- $W_{B_{WE}} = \{B_{WE} \geq 3.8285\}$

Puis nous avons choisi deux valeurs alternatives de β, à savoir $\beta = 0.7$ et $\beta = 1.3$. Les estimations des puissances correspondantes ont alors été effectuées à partir de 100000 simulations d'un échantillon de la loi de Weibull (dont le paramètre η est fixé à 100) de taille n=10 et toujours censuré par C=100 .
On obtient le tableau des puissances suivant :

Régions critiques	valeurs alternatives de β	
	$\beta = 0.7$	$\beta = 1.3$
W	33.9%	12.0%
$W_{NP(\beta=0.7)}$	42.9%	-
$W_{NP(\beta=1.3)}$	-	26.5%
W_{RV}	23.7%	20.2%
W_{MV}	28.0%	16.0%
W_b	24.9%	16.5%
$W_{B_{WE}}$	24.0%	19.7%

On constate donc le bon comportement de notre région critique W lorsque $\beta = 0.7$ qui, cependant, ne se confirme pas dans le cas $\beta = 1.3$.
On peut également noter les puissances presque identiques pour le test du rapport de vraisemblance et pour le test associé au facteur de Bayes.

En conclusion, les résultats obtenus sont du même ordre que les méthodes classiques. Il n'y a, en définitive, rien d'étonnant à cela car nous ne faisons pas intervenir d'information a priori obtenue par expertise.

2.4 Test d'un processus de Poisson homogène

Tester l'hypothèse de constance de l'intensité de défaillance pour un matériel réparable revient à tester si le processus de Poisson est homogène. Nous examinons dans cette section quelques tests les plus utilisés habituellement pour répondre à cette question.

2.4.1 Un test classique

En premier lieu nous présentons une procédure classique connue sous le nom du Military Handbook test.

Il est utilisé pour tester les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{le processus de Poisson est homogène } (\lambda \text{ constant}) \\ H_1 : & \text{le processus de Poisson est non homogène} \\ & \quad \text{avec intensité monotone } (\lambda \text{ variable, croissant ou décroissant}). \end{cases}$$

Lorsque le processus des défaillances observées sur un matériel réparable est considéré comme provenant d'un processus de Poisson homogène (c'est-à-dire sous H_0), les instants de défaillances $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ avec $T_1 < T_2 \ldots < T_n$, se répartissent uniformément sur l'intervalle $[0, T_n]$ (cf. chapitre 1).

Pour valider l'hypothèse H_0, on peut donc tester cette uniformité des instants de défaillances, ceci grâce à la variable de décision suivante :

$$M = -2\sum_{i=1}^{n-1} \ln \tfrac{T_i}{T_n} \; .$$

Sous H_0, cette variable aléatoire M suit une loi du Khi-deux à $2(n-1)$ degrés de liberté, notée $\chi^2(2(n-1))$.

Sous H_1, M aura tendance à être soit trop faible si l'intensité est croissante (qui correspond au vieillissement) soit trop grande si au contraire l'intensité est décroissante (période de jeunesse).

Dans le cas où H_1 correspond à un processus de Poisson non homogène avec une intensité croissante, la région critique est :

$$W = \left\{ -2\sum_{i=1}^{n-1} \ln \tfrac{T_i}{T_n} \leq K \right\}.$$

Le seuil critique K est lu dans la table de la loi du Khi-deux et dépend du risque α choisi.

Remarque 1 : la variable de décision précédente peut être légèrement modifiée si l'on observe le processus sur un intervalle [a,b] fixé au départ. En effet, on utilise :

$M = -2\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{T_i}{b-a}$ qui suit une loi du $\chi^2(2n)$.

Remarque 2 : ce test est optimal pour une alternative correspondant à un processus de Weibull.

Généralisation

Ce test peut se généraliser au cas où l'on observe plusieurs processus de Poisson ayant tous même intensité (c'est le cas de matériels réparables identiques utilisés dans des conditions similaires).

La variable de décision s'écrit alors (par exemple dans le cas où l'on observe les m processus sur un intervalle [a,b]) :

$$M = -2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} \ln \frac{T_{i,j}}{b-a}.$$

Sous H_0 (les m processus associés aux m matériels suivis proviennent de processus de Poisson homogènes), M suit une loi du $\chi^2(2\sum_{j=1}^{m} n_j)$. La justification de ce résultat repose sur le fait qu'en superposant des processus de Poisson homogènes, on obtient à nouveau un processus de Poisson homogène.

2.4.2 Test de Laplace

Les deux hypothèses testées sont les mêmes que précédemment :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{le processus de Poisson est homogène} \\ H_1 : & \text{le processus de Poisson est non homogène avec intensité monotone} \end{cases}$$

Le test de Laplace (cf. [4]) utilise le fait que, sous H_0, $\sum_{i=1}^{n-1} T_i$ suit une loi gausssienne grâce au Théorème Central Limite.

La variable de décision utilisée est donc :

$$L = \frac{(\sum_{i=1}^{n-1} T_i) - (n-1)\frac{T_n}{2}}{T_n\sqrt{\frac{n-1}{12}}}$$

qui suit une loi gaussienne N(0,1) sous H_0.

L'idée du test de Laplace est de comparer la moyenne des instants de défaillances avec le centre de l'intervalle d'observation du processus :

- si L est trop grand on en conclut que l'intensité est croissante (il y a vieillissement),
- si L est trop faible on en conclut que l'intensité est décroissante.

La région critique de ce test s'écrit donc : $W = \{|L| \geq K\}$.
K est la valeur critique lue dans la table de la loi gaussienne N(0,1).

Remarque 1 : dans le cas où l'on observe le processus sur un intervalle [a,b] fixé à l'avance, on utilise la variable aléatoire légèrement modifiée suivante :

$$L = \frac{(\sum_{i=1}^{n} T_i) - n\frac{a+b}{2}}{(b-a)\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

Remarque 2 : ce test est optimal lorsque l'alternative est un processus de Poisson ayant une intensité log-linéaire, c'est-à-dire de la forme : $\lambda(t) = e^{\alpha+\beta t}$.

Généralisation

De même que précédemment, on peut généraliser le test de Laplace au cas où plusieurs processus de Poisson de même intensité sont observés. On utilise alors :

$$L = \frac{(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} T_{i,j}) - \sum_{j=1}^{m} n_j\frac{a+b}{2}}{(b-a)\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} n_j}{12}}}$$

qui suit une loi gaussienne N(0,1) sous H_0 (les m processus proviennent de processus de Poisson homogènes).

Ce test est alors optimal pour une alternative définie comme suit :

les m processus proviennent de processus de Poisson ayant des intensités de la forme $\lambda(t) = e^{\alpha_i + \beta t}$ où β est commun aux m processus et α_i est spécifique à chacun des m processus.

2.4.3 Test de Gnedenko

Le test de Gnedenko (cf. [23]) propose une région critique différente pour tester les mêmes hypothèses que précédemment.

Il est basé sur la variable aléatoire $G = \frac{T_{\frac{n}{2}}}{T_n - T_{\frac{n}{2}}}$ qui suit une loi de Fisher F(n,n) sous H_0.

- Le test de Gnedenko utilise donc la médiane des observations $T_{\frac{n}{2}}$ alors que le test de Laplace utilise la moyenne.

- Une version plus générale du test de Gnedenko utilise n'importe lequel des instants de défaillances T_i en définissant $G = (\frac{n-i}{i}) \times \frac{T_i}{T_n - T_i}$ qui suit la loi de Fisher F(2i,2(n-i)) sous H_0.

Conclusion du test de Gnedenko :

si G est trop grand alors l'intensité est croissante,

si G est trop faible alors l'intensité est décroissante.

La région critique associée à ce test s'écrit donc : $W = \{G \geq K_1 ou \leq K_2\}$. K_1 et K_2 sont des seuils critiques lus dans la table de la loi de Fisher F(n,n) qui dépendent du risque α choisi.

2.4.4 Le graphe TTT

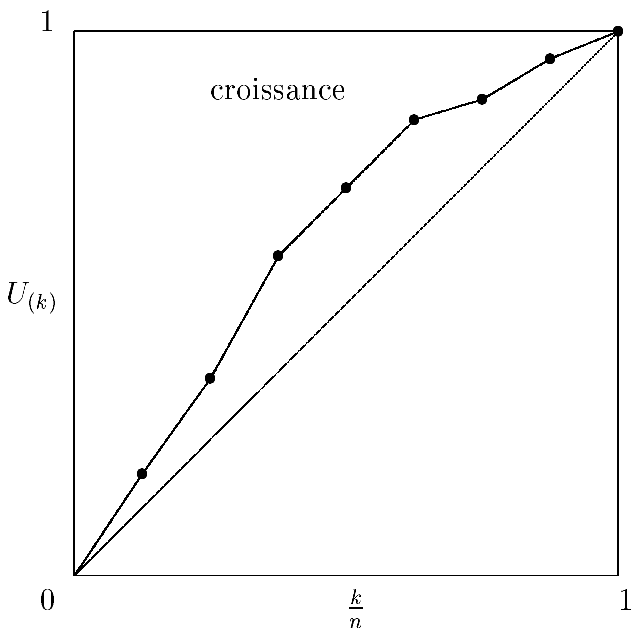
Bien que le graphe TTT soit plus connu dans le cas des matériels non réparables, il est possible de l'utiliser dans le cadre réparable.
On suppose que l'on observe m processus de Poisson non homogènes qui ont une intensité commune $\lambda(t)$ et qui sont définis chacun sur un intervalle $[a_i \ b_i]$ inclus dans $[0 \ S]$. On note n_i le nombre de défaillances observées dues au i-ème processus et $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$.
Soit S_k le k ième instant d'arrivée d'une défaillance dans le processus superposé. On a donc :

$$0 < S_1 < S_2 < ... < S_N < S.$$

Soient $p(u)$ le nombre de processus observés à l'instant u et
$\mathcal{T}(t) = \int_0^t p(u)du$ le Temps Total en Test jusqu'à l'instant t.
Le graphe TTT est une représentation graphique du Temps Total en Test normalisé

$$U_k = \frac{\mathcal{T}(S_k)}{\mathcal{T}(S)} = \frac{\int_0^{S_k} p(u)du}{\int_0^{S} p(u)du}$$

en fonction du nombre de défaillances normalisé $\frac{k}{N}, k = 1, ..., N$.



Les interprétations sont les suivantes :

Une absence de tendance correspond à une courbe représentative proche de la diagonale.
Le cas d'une intensité croissante se traduit par une courbe au-dessus de cette diagonale cf. la figure, tandis qu'une intensité décroissante donnerait une courbe en-dessous.
Le cas d'une courbe qui commencerait en-dessous de la diagonale, puis la couperait à un certain moment pour passer au-dessus, correspondrait à une intensité en forme de baignoire.

Là encore, notre remarque déjà faite dans le cas d'un matériel non réparable tient toujours. En effet, l'instant, à partir duquel une courbe (démarrant linéairement au-dessus de la diagonale) changerait de direction franchement pour rejoindre le sommet du carré, pourrait s'interpréter comme le moment où l'intensité augmente et traduit donc le vieillissement.

Chapitre 3

Un modèle de vieillissement pour un matériel non réparable

3.1 Introduction

Nous commençons par rappeler brièvement quelques modèles paramétriques de vieillissement qui peuvent constituer une alternative à la loi exponentielle. Les deux principaux sont le modèle de Weibull et la loi gamma que nous avons déjà évoqués dans le chapitre précédent. On peut également citer deux modèles moins familiers, définis respectivement par les densités suivantes :

- $f_L(t) = \lambda(1 + \theta\lambda t)e^{-(\lambda t + \frac{1}{2}\theta\lambda^2 t^2)}$
- $f_M(t) = \lambda(1 + \theta K(\lambda t))e^{-(\lambda t + \theta(\lambda t - K(\lambda t)))}$ où $K(x) = 1 - exp(-x)$

Ces deux densités sont associés aux taux de défaillance suivants :

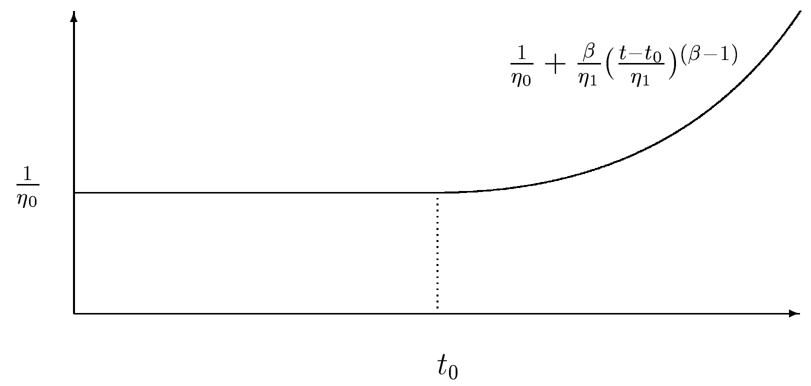
- $\lambda_L(t) = \lambda(1 + \theta\lambda t)$
- $\lambda_M(t) = \lambda(1 + \theta(1 - e^{-\lambda t}))$

On remarque que ces modèles englobent le cas particulier de la loi exponentielle (qui correspond à $\theta = 0$). Leurs taux de défaillance sont croissants pour

$\theta > 0$. De plus $\lambda_L(t)$ a une forme linéaire.
Mais ces modèles ont l'inconvénient (dans notre optique) de ne pas faire apparaître l'instant où le vieillissement d'un matériel débute.
Afin d'en tenir compte, deux modèles ont été proposés :
L'un, très simple, décompose le taux de défaillance en deux paliers, cf. l'article de Clarotti [13]. L'autre, proche de notre formulation, étudie un modèle pour lequel le taux de défaillance est constant au début (à un niveau λ), puis augmente suivant une forme $\lambda + \lambda^\alpha \alpha (t-\tau)^{(\alpha-1)}$ à partir de l'instant τ, cf. l'article de Zacks [54]. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que notre formulation est plus générale que ces deux modèles et permet de plus une interprétation intéressante.

3.2 Présentation de notre modèle

Afin de pouvoir étudier l'instant de vieillissement d'un matériel non réparable, sa durée de vie X est modélisée au moyen d'une loi dont le taux de défaillance est choisi de la manière suivante :



Il est constant, égal à $\frac{1}{\eta_0}$, jusqu'à un instant de vieillissement noté t_0 (ce qui traduit une absence de vieillissement jusqu'à cette date), puis il augmente suivant une fonction de la forme $\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}(\frac{t-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)}$ ce qui traduit alors un vieillissement. On peut noter que la forme de ce vieillissement comporte un terme (le second) que l'on retrouve dans une loi de Weibull. Ce taux de défaillance ainsi défini est donc la somme de deux fonctions : l'une constante égale à $\frac{1}{\eta_0}$ et l'autre nulle jusqu'à t_0 puis ensuite égale à $\frac{\beta}{\eta_1}(\frac{t-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)}$. Il s'ensuit que X peut s'écrire sous la forme $X = \min(Y, W)$ où

- Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre η_0 (qui correspond à un taux de défaillance constant égal à $\frac{1}{\eta_0}$),
- W est une variable aléatoire, indépendante de Y, de loi de Weibull ayant un paramètre de positionnement t_0.

En définitive, cette modélisation permet de décrire des matériels dont les défaillances sont accidentelles jusqu'à une date t_0, et peuvent être soit accidentelles soit provenant du vieillissement du matériel si elles ont lieu après cette date.
Il faut noter, avant de terminer cette présentation et pour faire le lien avec le paragaphe précédent, que le modèle de Clarotti à deux paliers correspond au cas particulier où $\beta = 1$ dans notre modèle.
Le modèle de Zacks, quant à lui, correspond au cas $\eta_0 = \eta_1$ dans notre modèle. Il apparaît donc que, dans ce cas, le paramètre de la loi exponentielle est égal à celui de la loi de Weibull. Ceci a l'inconvénient en pratique de ne pas s'interpréter facilement car la cadence des accidents n'a pas de raison d'être liée à un paramètre de vieillissement (puisque les deux phénomènes sont présentés comme stochastiquement indépendants dans notre modèle).

3.3 Étude de la loi du modèle

3.3.1 Fonction de survie, densité et espérance

Compte tenu du paragraphe précédent, le taux de défaillance de X s'écrit :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\eta_0} & \text{si } \ x \leq t_0 \\ \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}(\frac{x-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)} & \text{si } \ x > t_0 \end{cases}$$

Connaissant ce taux de défaillance, on en déduit une expression simple de la fonction de survie de X grâce à la relation :

$$S\left(x\right) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

D'où

$$S(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\eta_0}x} & \text{si } \ x \leq t_0 \\ e^{-\frac{1}{\eta_0}x}e^{-(\frac{x-t_0}{\eta_1})^\beta} & \text{si } \ x > t_0 \end{cases}$$

On obtient aussi la densité de X grâce à la relation :

$$f(x) = h(x)e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

D'où

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\eta_0}e^{-\frac{1}{\eta_0}x} & \text{si } x \leq t_0 \\ \left[\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right] e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta} & \text{si } \ x \geq t_0 \end{cases}$$

Calcul de l'espérance de X

Pour clore ce paragraphe nous proposons ici une première façon de calculer $E(X)$ dans le cas β égal à 2.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} S(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\eta_0}x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\eta_0}x-(\frac{x-t_0}{\eta_1})^2}dx \end{aligned}$$

$$= \eta_0(1 - e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}) + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\eta_1^2} - x(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2}) - \frac{t_0^2}{\eta_1^2}} dx$$
$$= \eta_0(1 - e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}) + \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{x}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{2}(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2}))^2 + \frac{\eta_1^2}{4}(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2})^2 - \frac{t_0^2}{\eta_1^2}} dx$$

En posant $u = \frac{x}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{2}(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2})$, on obtient :

$$= \eta_0(1 - e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}) + \eta_1 e^{+\frac{\eta_1^2}{4}(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2})^2 - \frac{t_0^2}{\eta_1^2}} \int_{\frac{t_0}{\eta_1} + \frac{\eta_1}{2}(\frac{1}{\eta_0} - 2\frac{t_0}{\eta_1^2})}^{+\infty} e^{-u^2} du$$
$$= \eta_0(1 - e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}) + \eta_1 e^{\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2} - \frac{t_0}{\eta_0}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})$$

où la fonction erfc est définie de manière classique par :

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

3.3.2 Calcul de la fonction génératrice de X

Dans toute la suite nous fixons β égal à 2 afin de mener à bien les calculs. En effet, pour $\beta \neq 2$, les intégrales ne peuvent être calculées analytiquement.

$$\begin{aligned} G(u) &= E(e^{uX}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{ux} f(x) dx \\ &= \int_0^{t_0} e^{ux} \frac{1}{\eta_0} e^{-\frac{1}{\eta_0}x} dx + \int_{t_0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right] e^{-\left(\frac{1}{\eta_0} - u\right)x} e^{-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta} dx \\ &= \frac{1}{1-u\eta_0}\left(1 - e^{\left(u - \frac{1}{\eta_0}\right)t_0}\right) + \int_0^{+\infty} \left[\frac{\eta_1}{\eta_0} + \beta y^{\beta-1}\right] e^{-\left(\frac{1}{\eta_0} - u\right)(t_0 + \eta_1 y)} e^{-y^\beta} dy, \end{aligned}$$

après avoir posé $y = \frac{x-t_0}{\eta_1}$.

Calculons l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\eta_1}{\eta_0} + \beta y^{\beta-1}\right] e^{-\left(\frac{1}{\eta_0} - u\right)(t_0 + \eta_1 y)} e^{-y^\beta} dy$ pour $\beta = 2$

$$I = e^{-\left(\frac{1}{\eta_0} - u\right)t_0} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\eta_1}{\eta_0} + 2y\right] e^{-\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0} - u\right)y - y^2} dy$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)t_0} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\eta_1}{\eta_0} + 2y\right] e^{-\left[y+\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2+\left[\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2} dy$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)t_0} e^{\left[\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2} \times$$
$$\left[\frac{\eta_1}{\eta_0}\int_{\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)}^{+\infty} e^{-v^2}dv + 2\int_{\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)}^{+\infty} \left(v - \frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right) e^{-v^2}dv\right]$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)t_0} e^{\left[\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2} \times$$
$$\left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_0} - \eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(\tfrac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)) + \left[-e^{-v^2}\right]_{\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)}^{+\infty}\right]$$
$$= e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)t_0} e^{\left[\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2} \left[(\eta_1 u)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(\tfrac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)) + e^{-\left(\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right)^2}\right]$$

En définitive, la fonction génératrice de X s'écrit :

$$G(u) = \frac{1}{1-u\eta_0}\left(1 - \eta_0 u e^{\left(u-\frac{1}{\eta_0}\right)t_0}\right)$$
$$+ e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)t_0} e^{\left[\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right]^2} \left[\eta_1 u \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)\right)\right]$$

3.3.3 Calcul de l'espérance et de la variance de X

Disposant de la fonction génératrice de X, un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 va nous permettre de calculer l'espérance (déjà obtenue ci-dessus) et la variance de X, toujours pour β fixé à 2.

Tout d'abord, le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right))$ donne :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(\tfrac{1}{2}\eta_1\left(\frac{1}{\eta_0}-u\right)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0}) + \frac{1}{2}\eta_1 e^{-(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2} u + o(u).$$

Ensuite le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $G(u)$ s'écrit :

$$G(u) = (1+\eta_0 u + \eta_0^2 u^2 + o(u^2))\left(1 - \eta_0 e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}u - \eta_0 t_0 e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}u^2 + o(u^2)\right) +$$

$$e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}\left(1+t_0u+o\left(u\right)\right)\left(e^{(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}\left(1-\frac{\eta_1^2}{2\eta_0}u+o\left(u\right)\right)\right)\times$$
$$(\eta_1 u)\times\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})+\frac{1}{2}\eta_1 e^{-(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}u+o(u)\right)$$
$$=1+\left[\eta_0(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0})+\eta_1 e^{\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2}-\frac{t_0}{\eta_0}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})\right]u$$
$$+\left[\eta_0^2\left(1-e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\right)-t_0\eta_0 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}+\eta_1 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}+(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}\left((t_0-\frac{\eta_1^2}{2\eta_0})\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})+\frac{1}{2}\eta_1 e^{-(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}\right)\right]u^2$$
$$+o\left(u^2\right)$$

On identifie alors :

$$E(X)=\eta_0(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0})+\eta_1 e^{\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2}-\frac{t_0}{\eta_0}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})$$
$$E(X^2)=2\left[\eta_0^2\left(1-e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\right)-t_0\eta_0 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}+\eta_1 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}+(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}\left((t_0-\frac{\eta_1^2}{2\eta_0})\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(\frac{\eta_1}{2\eta_0})+\frac{1}{2}\eta_1 e^{-(\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2}\right)\right]$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2.$$

Nous concluons ces résultats par quelques remarques sur des cas limites :

1. cas $\eta_0 \to +\infty$

   $E(X) \to t_0+\eta_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car $\operatorname{erfc}(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$

   $E(X^2) \to t_0^2+2\eta_1\left(t_0\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{1}{2}\eta_1\right)$

   et

   $V(X) \to \eta_1^2\left(1-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right)$

   On reconnaît naturellement l'espérance et la variance d'une loi de Weibull à 3 paramètres (t_0,η_1,β) où $\beta=2$:

   $E(X)=t_0+\eta_1\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ et $V(X)=\eta_1^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)$

   Ceci s'explique par le fait que, dans le cas $\eta_0 \to +\infty$, le minimum d'une telle loi exponentielle et d'une loi de Weibull est toujours réalisé par cette dernière.

2. cas $\eta_1 \to +\infty$

   $E(X) \to \eta_0(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0})+\eta_0 e^{-\frac{1}{\eta_0}t_0}=\eta_0$

car $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}(x) \sim e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$E(X^2) \to 2\left(\eta_0^2\left(1 - e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\right) - t_0\eta_0 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}} + e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\left(\eta_0^2 + \eta_0 t_0\right)\right) = 2\eta_0^2$

et

$V(X) \to \eta_0^2$

On reconnaît l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre η_0. Dans ce cas, en effet, le minimum est toujours réalisé par la loi exponentielle.

3. cas $t_0 \to +\infty$

   $E(X) \to \eta_0$

   $E(X^2) \to \eta_0^2$

   et

   $V(X) \to \eta_0^2$

   On reconnaît là encore l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre η_0.

3.4 Estimation

3.4.1 Écriture de la vraisemblance

Lorsque les données sont complètes, la vraisemblance, qui est une fonction des 4 paramètres η_0, η_1, β et t_0, s'écrit $L = \prod f(x_i)$. Ici, la densité n'ayant pas la même forme avant et après t_0, il faut distinguer la position de t_0 par rapport aux n durées de vie observées $x_1, ..., x_n$. Pour des raisons de simplicité de calcul, t_0 sera souvent fixé sur l'une de ces durées x_i ou bien en 0, notamment lorsque nous traiterons du test de vieillissement. Cela donne ainsi $n + 1$ formes possibles pour la vraisemblance, notées L_i lorsque l'on observe i durées de vie inférieures ou égales à t_0.

On note $x_{(1)},...,x_{(n)}$ l'échantillon ordonné.
Pour un t_0 quelconque, L_i s'écrit alors :

$$\begin{aligned} L_i &= \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^i \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{i} x_{(j)}} \times \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \\ &\times \; e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=i+1}^{n} x_{(j)}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}} \end{aligned}$$

et

$$L_0 = \left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}-\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

3.4.2 Maximisation de la vraisemblance

Comme nous avons fixé t_0 (conditionnellement aux données), la recherche de notre estimateur peut se formuler ainsi :
$\max\limits_{t_0}(max(L_i(\eta_0, \eta_1, \beta)))$.
Or la vraisemblance n'est pas bornée. Nous allons montrer qu'il existe un chemin dans l'espace des paramètres qui conduit à une vraisemblance infinie lorsque β tend lui-même vers l'infini. Nous nous inspirons d'une preuve donnée par Friedman et Gertsbakh [21].

Preuve :

Ici t_0 est un réel positif quelconque fixé, mais pas nécessairement sur un x_i.
La vraisemblance des données s'écrit :

$$L = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)} - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right]$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

où i est le nombre d'observations de l'échantillon qui se situent avant l'instant t_0.

D'où la log-vraisemblance :

$$\ln L = -n\ln\eta_0 + \left[\sum_{j=i+1}^{n} \ln\left(1+\beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] - \frac{1}{\eta_0}\sum_{j=1}^{n} x_{(j)} - \sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}$$

Fixons maintenant η_0 qui peut prendre une valeur quelconque et choisissons $\widetilde{\eta_1} = \left(\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(x_{(j)} - t_0\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ qui est donc lié à β.

Au point $(\eta_0, \widetilde{\eta_1}, \beta)$:

$$\ln L > -n\ln\eta_0 + \ln\left(1+\beta\frac{\eta_0}{\widetilde{\eta_1}}\left(\frac{x_{(n)}-t_0}{\widetilde{\eta_1}}\right)^{\beta-1}\right) - \frac{1}{\eta_0}\sum_{j=1}^{n} x_{(j)} - 1$$

or

$$1+\beta\frac{\eta_0}{\widetilde{\eta_1}}\left(\frac{x_{(n)}-t_0}{\widetilde{\eta_1}}\right)^{\beta-1} = 1+\beta\frac{\eta_0}{x_{(n)}-t_0}\frac{\left(x_{(n)}-t_0\right)^{\beta}}{\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(x_{(j)}-t_0\right)^{\beta}}$$
$$= 1+\beta\frac{\eta_0}{x_{(n)}-t_0}\frac{1}{1+\sum\limits_{j=i+1}^{n-1}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{x_{(n)}-t_0}\right)^{\beta}}$$

et $\quad \frac{1}{1+\sum\limits_{j=i+1}^{n-1}\left(\frac{x_{(j)}-t_0}{x_{(n)}-t_0}\right)^{\beta}} \to 1 \quad$ lorsque $\beta \to +\infty$.

Donc $1+\beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{x_{(n)}-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1} \to +\infty \quad$ lorsque $\beta \to +\infty$.

A fortiori $\ln L$ est infinie lorsque $\beta \to +\infty$.

3.4.3 Estimateur du maximum de vraisemblance

A la suite du résultat précédent, nous sommes amenés à considérer β comme un paramètre fixe et connu (par exemple $\beta = 2$) pour pouvoir utiliser la procédure du maximum de vraisemblance. La maximisation ne pose pas de problèmes numériques lorsque la taille d'échantillon est suffisante (au moins égale à 25). Nous présentons des résultats de simulation à la suite.
Nous avons simulé 1000 échantillons de la loi de notre modèle avec les paramètres $t_0 = 0.5$, $\beta = 2$, $\eta_1 = 1$, $\eta_0 = 1$. Et ceci pour des tailles successives : n=50, 100, 1000 .
Voici les résultats :

		$\hat{t_0}$	$\hat{\eta_1}$	$\hat{\eta_0}$
$n = 50$	moyenne	0.54	0.91	1.18
	écart-type	0.30	0.26	0.68
$n = 100$	moyenne	0.52	0.94	1.09
	écart-type	0.26	0.21	0.30
$n = 1000$	moyenne	0.50	1.00	1.01
	écart-type	0.07	0.05	0.06

Nous constatons ainsi le bon comportement des estimateurs du Maximum de Vraisemblance, pour des tailles d'échantillon suffisantes.

3.4.4 Algorithme EM

Afin de s'affranchir de la condition β fixé, nous proposons d'utiliser l'algorithme EM pour trouver une solution de l'équation de vraisemblance. Les estimateurs obtenus par simulation sont satisfaisants si la taille d'échantillon est suffisante. Cela conforte l'idée que notre procédure est convergente pour une taille n assez grande. Nous donnerons dans la section suivante la preuve de l'existence d'une solution convergente de l'équation de vraisemblance. Nous présentons maintenant l'algorithme EM d'abord dans sa généralité puis dans notre contexte.

Présentation générale de l'algorithme EM

L'algorithme EM (pour Expectation-Maximisation), proposé par Dempster, Laird et Rubin (1977), est devenu un outil de plus en plus important pour maximiser des log-vraisemblances dans le cadre des modèles à données manquantes. Il est utile lorsque la vraisemblance du "modèle complété" est plus facile à manier dans les calculs que la vraisemblance observée. Sa propriété fondamentale est de toujours faire croître la vraisemblance observée.

Soient x les données complètes d'un modèle statistique dont le paramètre vectoriel est noté θ. x se décompose en données réellement observées notées ici y et en données manquantes notées z. On a donc $x = (y, z)$.

Soient :

- $l_x(\theta)$ la log-vraisemblance du modèle complet
- $l_y(\theta)$ la log-vraisemblance observée
- $k_{z/y}(\theta)$ la densité conditionnelle des données manquantes sachant les données observées
- $Q(\theta/\tilde{\theta}) = E\left(l_x(\theta) \ / \ y, \tilde{\theta}\right)$ où $\tilde{\theta}$ est l'estimation courante du paramètre.
- $H(\theta/\tilde{\theta}) = E\left(\ln k_{z/y}(\theta) \ / \ y, \tilde{\theta}\right)$

La relation liant les vraisemblances est la suivante :

$$l_x(\theta) = l_y(\theta) + \ln k_{z/y}(\theta).$$

D'où, en prenant l'espérance conditionnelle (sachant les données observées et la valeur courante du paramètre) de chaque membre, on obtient :

$$l_y(\theta) = Q(\theta/\tilde{\theta}) - H(\theta/\tilde{\theta})$$

Or, en utilisant l'inégalité de Jensen, on montre que :

$$H(\theta/\tilde{\theta}) \leq H(\tilde{\theta}/\tilde{\theta})$$

Par conséquent, si $Q(\theta/\tilde{\theta}) \geq Q(\tilde{\theta}/\tilde{\theta})$ alors $l_y(\theta) \geq l_y(\tilde{\theta})$.

Ceci étant posé, la procédure de l'algorithme EM est ainsi définie :

On part d'une valeur initiale θ^0 et on itère les deux étapes successives suivantes :

Etape E : calcul de l'espérance conditionnelle $Q(\theta/\theta^{(n)})$.

Etape M : maximisation en θ de $Q(\theta/\theta^{(n)})$ qui donne $\theta^{(n+1)}$.

On est donc sûr qu'à chaque itération la vraisemblance $l_y(\theta)$ croît. De manière plus précise, on a la propriété suivante :

La suite $\left(\theta^{(n)}\right)$ engendrée par l'algorithme EM est telle que :

$$l_y(\theta^{(n+1)}) \geq l_y(\theta^{(n)}).$$

De plus, $l_y(\theta^{(n+1)}) = l_y(\theta^{(n)}) \Leftrightarrow Q(\theta^{(n+1)}/\theta^{(n)}) = Q(\theta^{(n+1)}/\theta^{(n)})$

Finalement, on peut montrer que l'algorithme EM converge vers un point stationnaire de la vraisemblance (qui est soit un maximum local de la vraisemblance soit malheureusement un point selle).

Mise en place de l'algorithme EM

Nous considérons un échantillon de notre modèle de vieillissement dans lequel certaines observations peuvent être censurées à droite. Le paramètre θ

du modèle est, rappelons-le, (η_0, η_1, β) et t_0 est fixé à une valeur quelconque. Afin d'éviter des formules trop lourdes, nous notons :

- $h_E(x) = \frac{1}{\eta_0}$ le taux de défaillance de la loi exponentielle
- $S_E(x) = e^{-\frac{1}{\eta_0}x}$ la fonction de survie de la loi exponentielle
- $h_W(x) = \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1} 1_{[t_0,+\infty[}(x)$ le taux de défaillance de la loi de Weibull décalée en t_0
- $S_W(x) = 1_{[0,t_0]}(x) + e^{-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}} 1_{[t_0,+\infty[}(x)$ la fonction de survie de la loi de Weibull décalée en t_0

Ici les données manquantes sont les indicateurs $z_i = (z_i^E, z_i^W)$qu'une défaillance est accidentelle (i.e. provient de la loi exponentielle sous-jacente, $z_i^E = 1$) ou bien due au vieillissement (i.e. provient de la loi de Weibull sous-jacente, $z_i^W = 1$).
Remarquons ensuite que les données observées y_i sont des réalisations de la variable aléatoire $\min(E_i, W_i, C_i)$ où E_i (respectivement W_i) suit une loi exponentielle (Weibull) et C_i est la date de censure de la i-ème observation.
En définitive, les données complètes sont les $x_i = (\ y_i, z_i)$.
La densité de X_i s'écrit :
$f(x_i) = (h_E(y_i))^{z_i^E} (h_W(y_i))^{z_i^W} S_E(y_i) S_W(y_i)$
On en déduit la log-vraisemblance complète :
$l_x(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[z_i^E \ln(h_E(y_i)) + z_i^W \ln(h_W(y_i)) + \ln(S_E(y_i)) + \ln(S_W(y_i))\right]$

Calculons maintenant l'espérance conditionnelle $Q(\theta/\tilde{\theta})$.

$$\begin{aligned} Q(\theta/\tilde{\theta}) &= E\left(l_x(\theta) \ / \ y, \tilde{\theta}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{c} E\left(z_i^E/y, \tilde{\theta}\right) \ln(h_E(y_i)) + E\left(z_i^W/y, \tilde{\theta}\right) \ln(h_W(y_i)) \\ + \ln(S_E(y_i)) + \ln(S_W(y_i)) \end{array} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\widetilde{p}_E(y_i) \ln(h_E(y_i)) + \widetilde{p}_W(y_i) \ln(h_W(y_i)) + \ln(S_E(y_i)) + \ln(S_W(y_i))\right] \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{p}_E(y_i) = E\left(z_i^E / y, \tilde{\theta}\right)$$
$$= \begin{cases} 0 \quad \text{si } y_i \text{ est une censure} \\ P\left(z_i^E = 1/y_i, \tilde{\theta}\right) = P(E_i \leq W_i/y_i, \tilde{\theta}) = \frac{f_E(y_i)S_W(y_i)}{f_E(y_i)S_W(y_i)+f_W(y_i)S_E(y_i)} \\ \qquad = \frac{h_E(y_i)}{h_E(y_i)+h_W(y_i)} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

De même

$$\widetilde{p}_W(y_i) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } y_i \text{ est une censure} \\ \frac{h_W(y_i)}{h_E(y_i)+h_W(y_i)} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

En définitive, l'espérance conditionnelle $Q(\theta/\tilde{\theta})$ peut se scinder en deux parties, l'une concernant la loi exponentielle, $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$, et l'autre concernant la loi de Weibull, $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$:

$$Q(\theta/\tilde{\theta}) = Q_E(\theta/\tilde{\theta}) + Q_W(\theta/\tilde{\theta})$$

avec

$$Q_E(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left[\widetilde{p}_E(y_i) \ln\left(h_E(y_i)\right) + \ln\left(S_E(y_i)\right)\right]$$

$$Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left[\widetilde{p}_W(y_i) \ln\left(h_W(y_i)\right) + \ln\left(S_W(y_i)\right)\right]$$

L'étape maximisation est maintenant facilitée par la décomposition de $Q(\theta/\tilde{\theta})$. En effet, il s'agit de maximiser séparément $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$ et $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$, puisque $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$ (respectivement $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$) ne fait intervenir que le paramètre η_0 (les paramètres $\eta_1$et β).

Pour le premier terme :

$$Q_E(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^n \widetilde{p}_E(y_i) \ln\left(\frac{1}{\eta_0}\right) - \frac{1}{\eta_0} y_i$$

et la maximisation par rapport à η_0 de cette quantité donne

$$\hat{\eta_0} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n \widetilde{p}_E(y_i)}.$$

Ensuite, pour le deuxième terme :

$$Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i\in I} \widetilde{p}_W(y_i) \ln\left(\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right) - \left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}$$

où I est l'ensemble des indices pour lesquels $y_i \geq t_0$.

En dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\eta_1}Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i\in I} \widetilde{p}_W(y_i)\left(\frac{-\beta}{\eta_1}\right) + \beta\left(y_i - t_0\right)^{\beta}\eta_1^{-\beta-1}$$

qui s'annule en $\eta_1 = \left(\frac{\sum\limits_{i\in I}(y_i-t_0)^{\beta}}{\sum\limits_{i\in I}\widetilde{p}_W(y_i)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

De même :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \sum_{i\in I} \widetilde{p}_W(y_i)\left[\frac{1}{\beta} + \ln\left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1}\right)\right] - \ln\left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1}\right)\left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}$$

qui conduit (en utilisant la relation précédente qui lie η_1 à β) à l'équation de vraisemblance suivante :

$$\frac{1}{\beta} + \frac{\sum\limits_{i\in I}\widetilde{p}_W(y_i)\ln(y_i-t_0)}{\sum\limits_{i\in I}\widetilde{p}_W(y_i)} - \frac{\sum\limits_{i\in I}(y_i-t_0)^{\beta}\ln(y_i-t_0)}{\sum\limits_{i\in I}(y_i-t_0)^{\beta}} = 0$$

En définitive, pour notre modèle, l'itération $n+1$ de l'algorithme EM requiert les calculs suivants :

1. calcul des $\widetilde{p}_E(y_i) = \dfrac{\frac{1}{\eta_0^{(n)}}}{\frac{1}{\eta_0^{(n)}} + \frac{\beta^{(n)}}{\eta_1^{(n)}}\left(\frac{y_i-t_0}{\eta_1^{(n)}}\right)^{\beta^{(n)}-1} 1_{[t_0,+\infty[}(y_i)}$ et $\widetilde{p}_W(y_i) = 1 - \widetilde{p}_E(y_i)$ pour toutes les observations non censurées.

2. calcul de $\eta_0^{(n+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n \widetilde{p}_E(y_i)}$.

3. résolution en β de l'équation de vraisemblance ci-dessus, qui donne donc $\beta^{(n+1)}$.

4. calcul de $\eta_1^{(n+1)} = \left(\frac{\sum\limits_{i \in I} (y_i - t_0)^{\beta^{(n+1)}}}{\sum\limits_{i \in I} \widetilde{p}_W(y_i)} \right)^{\frac{1}{\beta^{(n+1)}}}$.

Ces formules sont analogues à celles que l'on trouve dans [7] pour le cas du modèle à risques multiples indépendants suivant des lois de Weibull.

Utilisation de l'algorithme EM

Dans notre contexte et dans un premier temps, nous utilisons l'algorithme EM pour trouver une approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas où t_0 est fixé dans l'ensemble des valeurs $x_{(i)}$ ou bien plus généralement dans un ensemble de valeurs quelconques. Notons que lorsque l'échantillon est petit il est préférable de fixer t_0 ailleurs que sur les x_i qui ne sont pas assez nombreux. Nous calculons ensuite la vraisemblance obtenue dans chacun des cas correspondant aux t_0 différents. Nous choisissons alors le cas t_0 qui conduit à la plus grande vraisemblance. Les valeurs du paramètre obtenu dans ce cas sont alors les estimations des vraies valeurs des paramètres.

Résultats de simulation

Nous présentons dans cette section deux cas de simulations qui ont été effectuées dans le but de comparer l'estimation des paramètres de notre modèle par la maximisation directe de la vraisemblance et par l'algorithme EM :

– Le premier cas concerne 100 simulations d'un échantillon de taille 100 de notre modèle avec les paramètres $t_0 = 0.5$, $\beta = 2$, $\eta_1 = 1$, $\eta_0 = 1$.

- Le deuxième concerne 100 simulations d'un échantillon de taille 100 de notre modèle avec les paramètres $t_0 = 0.5$, $\beta = 3$, $\eta_1 = 1$, $\eta_0 = 1$. Dans ce cas la maximisation directe de la vraisemblance sera faite en fixant $\beta = 2$.

Voici les résultats :

Pour le premier cas

	MV			EM			
	$\hat{t_0}$	$\hat{\eta_1}$	$\hat{\eta_0}$	$\hat{t_0}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta_1}$	$\hat{\eta_0}$
moyenne	0.69	0.83	1.05	0.39	2.39	1.04	1.16
écart-type	0.55	0.34	0.25	0.29	1.45	0.28	0.41

Pour le deuxième

	MV			EM			
	$\hat{t_0}$	$\hat{\eta_1}$	$\hat{\eta_0}$	$\hat{t_0}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta_1}$	$\hat{\eta_0}$
moyenne	0.83	0.65	1.04	0.36	3.45	1.10	1.08
écart-type	0.34	0.22	0.21	0.35	1.73	0.35	0.24

À la suite de ces résultats on note les points suivants :

- la variabilité de $\hat{t_0}$ et $\hat{\beta}$ est assez importante
- $\hat{\eta_0}$ et $\hat{\eta_1}$ se comportent bien sauf peut-être pour le deuxième cas avec la procédure du Maximum de Vraisemblance où $\hat{\eta_1}$ semble se dégrader un peu

3.4.5 Existence d'une solution convergente de l'équation de vraisemblance

Nous rappelons tout d'abord le théorème de Chanda qui est une extension au cas multivarié d'un théorème de Cramer. Ce théorème prouve que sous certaines conditions il existe une solution convergente unique de l'équation de vraisemblance.

Théorème 3.1 *Soient f(x ;θ) une densité de probabilité,* $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ *le vecteur des paramètres inconnus et* $x_1, ..., x_n$ *des observations indépendantes de X. Les équations de vraisemblance sont données par*

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$

où $\ln L = \sum_{i=1}^{i=n} \ln f(x_i, \theta)$.

Soit θ_0 *la vraie valeur du vecteur des paramètres* θ *qui appartient à une région* Ω.

Alors, si les conditions 1-3 ci-dessous sont vérifiées, il existe un unique estimateur convergent (en probabilité) θ_n *correspondant à une solution des équations de vraisemblance. De plus,* $\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)$ *est asymptotiquement gaussien d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance* $I(\theta_0)^{-1}$ *où* $I(\theta_0)$ *est la matrice d'information de Fisher.*

CONDITION 1 :

Pour presque tout x et pour tout $\theta \in \overline{\Omega}$

$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_r}, \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_r \partial \theta_s}$ *et* $\frac{\partial^3 \ln f}{\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t}$ *existent pour tout r,s,t=1,...,k.*

CONDITION 2 :

Pour presque tout x et pour tout $\theta \in \overline{\Omega}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta_r}\right| < F_r(x), \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right| < F_{rs}(x) \qquad et \qquad \left|\frac{\partial^3 \ln f}{\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t}\right| < H_{rst}(x)$$

où H est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{rst}(x) f(x) dx \leq M < \infty$ *et* $F_r(x)$ *et* $F_{rs}(x)$ *sont bornées pour tout r,s,t=1,...,k.*

CONDITION 3 :

Pour tout $\theta \in \overline{\Omega}$ *la matrice*

$I(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)' f dx$ *est définie positive.*

Nous allons vérifier successivement ces 3 conditions dans notre cas.
Rappelons tout d'abord les relations suivantes :

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_r} = \frac{\partial f}{\partial \theta_r} \frac{1}{f}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_r \partial \theta_s} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_r \partial \theta_s} - \frac{\partial f}{\partial \theta_r} \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \frac{1}{f^2}$$

$$\frac{\partial^3 \ln f}{\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t} = 2 \frac{\partial f}{\partial \theta_r} \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \frac{\partial f}{\partial \theta_t} \frac{1}{f^3} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_r \partial \theta_t} \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \frac{1}{f^2} - \frac{\partial f}{\partial \theta_r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_s \partial \theta_t} \frac{1}{f^2} - \frac{\partial f}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \frac{1}{f^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t} \frac{1}{f}.$$

Ici θ est le paramètre (η_0, η_1, β).
Compte tenu de la forme particulière de la densité de X, nous distinguons le cas $x \leq t_0$ et le cas $x > t_0$ pour la vérification des deux premières conditions.

cas $x \leq t_0$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\eta_0} x} \left(-\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{x}{\eta_0^3} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta'} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\eta_0} x} \left(\frac{x^2}{\eta_0^5} - \frac{4x}{\eta_0^4} + \frac{2}{\eta_0^3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_t} = 0$ sauf pour $r = s = t = 1$, dans ce cas en effet $\frac{\partial^3 f}{\partial \eta_0^3} = e^{-\frac{1}{\eta_0}x}\left(\frac{x^3}{\eta_0^7} - \frac{9x^2}{\eta_0^6} + \frac{18x}{\eta_0^5} - \frac{6}{\eta_0^4}\right)$

Toutes ces fonctions sont continues pour $x \in [0, t_0]$ et $\eta_0 \in$ *un fermé borné*, donc elles sont bornées. Ceci montre que les 2 premières conditions sont vérifiées.

cas $x > t_0$

forme générale de la dérivée de $f(x)$

Nous montrons dans un premier temps que la forme générale des dérivées partielles à n'importe quel ordre par rapport à η_0, η_1 ou β est la suivante :

$$e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[P(\tfrac{1}{\eta_0}, \tfrac{1}{\eta_1}, \beta) + \sum_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0}, \tfrac{1}{\eta_1}, \beta)\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]$$

où :

- k_1 parcourt un ensemble borné de la forme $\{0, 1, ..., M_1\}$
- k_2 parcourt un ensemble borné de la forme $\{1, 2, ..., M_2\}$
- $k_3 = 0$ ou 1
- $P(\frac{1}{\eta_0}, \frac{1}{\eta_1}, \beta)$ et $Q(\frac{1}{\eta_0}, \frac{1}{\eta_1}, \beta)$ sont des polynômes à plusieurs indéterminées en $\frac{1}{\eta_0}, \frac{1}{\eta_1}$ et β.
- $Q(\frac{1}{\eta_0}, \frac{1}{\eta_1}, \beta)$ dépend aussi des indices k_1, k_2, k_3 mais pas de t_0.

Afin de montrer ce résultat, nous allons procéder par récurrence.
Nous remarquons d'abord que la densité $f(x)$ de X (ou dérivée d'ordre 0) est bien de cette forme.
Supposons maintenant que n'importe quelle dérivée partielle d'ordre n de

$f(x)$ est une fonction

$$g(x) = e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[P(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)+\sum_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]$$

et montrons que les dérivées partielles par rapport à η_0, η_1 ou β de cette fonction $g(x)$ appartiennent encore à cette même famille.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \eta_0} &= \\
& e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[\begin{array}{l}\frac{x}{\eta_0^2}\left(P(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right)\\
+\left(P(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\right)'+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3}\left(Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\right)'\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\end{array}\right]\\
&= e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[\widetilde{P}(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)+\sum_{k_1,k_2,k_3}\widetilde{Q}(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]
\end{aligned}$$

car $\left(P(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\right)'$ et $\left(Q(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\right)'$ sont évidemment de nouveaux polynômes en $\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1}$ et β.

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \eta_1} &= e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\times\\
&\left[\begin{array}{l}\beta\eta_1^{-1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta\left(P(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right)\\
\quad+\left(\left(P(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\right)'+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3}\left(Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\right)'\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right.\\
\qquad+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left[-\tfrac{k_1}{\eta_1}\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1-1}\right]\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\\
\qquad\left.+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left[-\tfrac{(k_2\beta-1)}{\eta_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]\right)\end{array}\right]\\
&= e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[\widetilde{P}(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)+\sum_{k_1,k_2,k_3}\widetilde{Q}(\tfrac{1}{\eta_0},\tfrac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\tfrac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}$$

$$\left[\begin{array}{l} -\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta \left(P(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right) \\ \quad +\left(\left(P(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\right)'+\sum\limits_{k_1,k_2,k_3}\left(Q(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\right)'\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right) \\ \qquad +\sum\limits_{k_1,k_2,k_3} Q(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left[k_2\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right]\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3} \end{array}\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{\eta_0}x-\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\left[\widetilde{P}(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)+\sum_{k_1,k_2,k_3}\widetilde{Q}(\frac{1}{\eta_0},\frac{1}{\eta_1},\beta)\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3}\right]$$

vérification des deux premières conditions du théorème de Chanda

Tout d'abord nous remarquons que toutes les dérivées partielles sont prolongeables par continuité lorsque $x \to t_0^+$ puisque
$\left(\ln\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{x-t_0}{\eta_1}\right)^{k_2\beta-k_3} \to 0$ lorsque $x \to t_0^+$.

Ensuite, nous considérons le comportement des dérivées partielles pour les grandes valeurs de x.

La forme générale trouvée ci-dessus montre qu'une dérivée partielle quelconque de $f(x)$ est toujours d'un ordre inférieur à $u^{M_2+1}e^{-u}$, ce qui prouve que les dérivées partielles premières et secondes sont toujours bornées pour tout x.

Il reste à vérifier la dernière partie de la condition 2 du théorème. Or la formule qui permet de calculer $\frac{\partial^3 \ln f}{\partial\theta_r\partial\theta_s\partial\theta_t}$ en fonction des dérivées partielles de f montre que chacun des termes de la somme est d'un ordre inférieur à x^{M_2}. Comme tous les moments de f existent (puisque c'est le cas de la loi exponentielle et que la variable X est le minimum d'une loi exponentielle et d'une loi de Weibull), on peut choisir une constante M telle que la condition 2 soit satisfaite.

vérification de la troisième condition du théorème de Chanda

Puisque $I(\theta)$ est une matrice de variance-covariance, elle est définie positive à moins qu'il n'existe trois constantes a, b, c non toutes nulles telles que :

$a\frac{\partial \ln f}{\partial \eta_0} + b\frac{\partial \ln f}{\partial \eta_1} + c\frac{\partial \ln f}{\partial \beta} = 0$ pour tout x.

Or en prenant un $x < t_0$, il apparaît que la constante a est nulle, puisqu'alors $\frac{\partial \ln f}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \ln f}{\partial \beta} = 0$.

En prenant maintenant des valeurs $x > t_0$, il est immédiat que nécessairement $b = c = 0$.

Par conséquent la matrice $I(\theta)$ est bien définie positive.

En définitive, les trois conditions du théorème étant vérifiées, nous venons de prouver l'existence d'une solution convergente unique de l'équation de vraisemblance.

3.5 Test de l'existence du vieillissement

3.5.1 Définition de la région critique

Dans cette section, nous cherchons à formaliser une procédure qui permette de décider s'il y a ou non vieillissement du matériel. Plus précisément, dans notre contexte, nous cherchons à savoir s'il existe un instant t_0 à partir duquel on peut considérer que le vieillissement se déclenche. Il s'agit donc ici d'effectuer un test des deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{X suit la loi exponentielle} \\ H_1 : & \text{La loi de X est régie par notre modèle de vieillissement} \end{cases}$$

Afin de définir la région critique de ce test nous fixons tout d'abord β pour ne pas avoir une vraisemblance infinie. Ensuite, nous reprenons la vraisemblance

des données telle que nous l'avons présentée dans la section précédente, en considérant que t_0 coïncide avec l'une des valeurs observées $x_{(i)}$.
Dans ce cas L_i peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
L_i &= \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^i \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{i} x_{(j)}} \times \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \\
&\times \quad e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=i+1}^{n} x_{(j)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta}}
\end{aligned}
$$

En remarquant que le cas $i = n$ correspond à la loi exponentielle on a :

$$L_n = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}}$$

D'où :

$$L_i = L_n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+\beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

Nous notons :

$$R_i(\eta_0,\eta_1) = \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+\beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

qui est donc le rapport des vraisemblances : $\frac{L_i}{L_n}$.

Nous proposons alors la région critique suivante :

$$W = \{\max\ R_i(\eta_0,\eta_1) \geq K\}$$

où $\max\ R_i(\eta_0,\eta_1)$ constitue notre variable de décision. Le maximum est pris pour i variant de 0 à n, puisque nous cherchons à comparer les L_i (pour

$i = 0, ..., n$) avec L_n qui correspond à l'absence de vieillissement. Une forte valeur de notre variable de décision joue donc en faveur de l'hypothèse d'un vieillissement (H_1).

Dans le paragraphe suivant, nous allons maintenant montrer la propriété essentielle suivante :

La loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0.

Pour cela, nous distinguons deux cas, suivant si η_0 est connu ou inconnu. Dans ce deuxième cas, nous proposerons une modification de la variable de décision pour garder l'indépendance de la loi par rapport à η_0 .

3.5.2 Preuve de l'indépendance de la loi de la variable de décision sous H_0

Cas η_0 connu

La maximisation de $R_i(\eta_0, \eta_1)$ se fait donc ici par rapport à i et η_1.

On note $a_j^i = \frac{x_{(j)} - x_{(i)}}{\eta_0}$ et $k = \frac{\eta_1}{\eta_0}$.
D'où :
$$R_i(\eta_0, k) = \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{k^\beta} \left(a_j^i \right)^{\beta - 1} \right) \right] \times e^{-\sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{1}{k^\beta} \left(a_j^i \right)^\beta}$$
Pour i fixé, $R_i(\eta_0, k)$ est maximum pour une valeur de k qui dépend du vecteur $(a_{i+1}^i, a_{i+2}^i, ..., a_n^i)$.

On a :

$\max R_i(\eta_0, k) = \max_i \max_k R_i(\eta_0, k)$.

Et $\max R_i(\eta_0, k)$ est une fonction du vecteur constitué de la collection complète des a$_j^i$, c'est-à-dire que

$\max R_i(\eta_0, k) = h(a_2^1, a_3^1, ..., a_n^1, a_3^2, ..., a_n^2, ..., a_n^{n-1})$.

Or le vecteur $(a_2^1, a_3^1, ..., a_n^1, a_3^2, ..., a_n^2, ..., a_n^{n-1})$ est une transformation linéaire simple du vecteur des espaces entre les durées de vie ordonnées, normalisés en divisant par η_0 :

$$(\tfrac{x_{(2)}-x_{(1)}}{\eta_0}, \tfrac{x_{(3)}-x_{(2)}}{\eta_0}, ..., \tfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{\eta_0}).$$

Sous H_0, ce dernier vecteur aléatoire est constitué de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre indépendant de η_0 (grâce à une propriété remarquable des échantillons de la loi exponentielle).

En définitive, sous H_0, la loi de $\max R_i(\eta_0, k)$ ne dépend pas de η_0.

Cas η_0 inconnu

Dans le cas où η_0 est inconnu, pour garder la propriété essentielle que la loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0, nous proposons une maximisation un peu différente.

Tout d'abord, nous estimons le paramètre η_0, dans chaque cas où $t_0 = x_{(i)}$, au moyen de $\hat{\eta}_{0,i}$ défini par

$$\hat{\eta}_{0,i} = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} + (n-i)x_{(i)}}{i}.$$

Ceci revient à utiliser seulement les données qui se situent avant t_0 pour estimer le paramètre η_0 (par analogie avec la méthode du maximum de vraisemblance dans le cas de données censurées) .

Ensuite R_i est maximisé, ce qui revient à résoudre $\max R_i(\hat{\eta}_{0,i}, k)$ où $k = \frac{\eta_1}{\eta_0}$. Numériquement, la maximisation ne pose pas de problème, mais il reste à prouver que, ce faisant, la loi de $\max R_i(\hat{\eta}_{0,i}, k)$, comme dans le cas précédent où η_0 était connu, ne dépend pas de la vraie valeur de η_0.

On a

$R_i(\eta_0, k) = \frac{L_i}{L_n}$

avec

$L_n = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}}$

$L_i = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\eta_0}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}} \times \left[\prod\limits_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_0}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{1}{k^\beta}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\eta_0}\right)^\beta}$

Premièrement, en ce qui concerne L_n, η_0 est estimé par $\hat{\eta}_{0,n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}}{n}$.

Puis, pour L_i, η_0 est estimé par $\hat{\eta}_{0,i} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} x_{(j)} + (n-i)x_{(i)}}{i}$

D'où, R_i ne dépendant plus que de k :

$$R_i(k) = \frac{\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\hat{\eta}_{0,i}}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}} \times \left[\prod\limits_{j=i+1}^{n} \left(1+\frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{1}{k^\beta}\left(\frac{x_{(j)}-x_{(i)}}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^\beta}}{\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{0,n}}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\hat{\eta}_{0,n}}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{(j)}}}.$$

Or $\hat{\eta}_{0,i}$ peut aussi s'écrire $\frac{\sum\limits_{j=1}^{i} (n-j+1)(x_{(j)}-x_{(j-1)})}{i}$

(en posant par convention $x_0 = 0$).

Le maximum de $\mathrm{R}_i(k)$, par rapport à i et k, est donc une fonction du vecteur $\frac{1}{\eta_0}(x_{(1)}, x_{(2)} - x_{(1)}, x_{(3)} - x_{(2)}, ..., x_{(n)} - x_{(n-1)})$ qui, comme on l'a déjà vu précédemment, a une loi indépendante de η_0 sous H_0.

3.5.3 Table des seuils critiques

En définitive, nous avons montré que la loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0. Cette loi peut donc être étudiée par simulation, pour une valeur de η_0 donnée. Ceci permet ensuite l'évaluation du seuil K pour un risque α fixé quelconque et également le calcul de la probabilité critique. Nous avons ainsi pu construire une table de seuils critiques pour différentes tailles d'échantillons et pour deux valeurs du risque α, à savoir $\alpha = 0.10$ et $\alpha = 0.05$.
Cette table est construite à partir de 10000 simulations d'échantillons de la loi exponentielle de paramètre 1, pour chaque taille différente n.
Voici la table obtenue :

Taille d'échantillon n	seuil à 10%	seuil à 5%
$n = 2$	4.20	5.68
$n = 3$	6.06	7.61
$n = 4$	7.44	10.62
$n = 5$	7.92	13.61
$n = 6$	8.29	14.80
$n = 7$	8.57	17.55
$n = 8$	9.12	19.85
$n = 9$	9.44	20.26
$n = 10$	10.06	24.68
$n = 20$	11.76	27.55
$n = 50$	12.50	28.28
$n = 100$	13.51	30.95

3.6 Conclusion

Compte tenu des résultats précédents, nous proposons maintenant une démarche générale, lorsqu'on est confronté à des défaillances observées sur un matériel non réparable.

Dans un premier temps, nous testons l'existence du vieillissement, en supposant η_0 inconnu, à moins que l'on dispose d'informations sur l'environnement industriel du matériel qui permettent de connaître la cadence des défaillances accidentelles.

Si le test précédent a permis de conclure à l'existence d'un vieillissement, alors nous estimons les paramètres du modèle $t_0, \eta_0, \eta_1, \beta$ grâce à l'algorithme EM. Là encore, nous pouvons utiliser la maximisation directe de la vraisemblance, si des informations suffisantes sur le matériel permettent de connaître la dynamique de son vieillissement et donc de fixer β.

Si l'on ne peut conclure à l'existence du vieillissement, alors le modèle approprié reste la loi exponentielle. On ne peut mettre en évidence un vieillissement du matériel.

Chapitre 4

Un modèle de vieillissement pour un matériel réparable

4.1 Introduction

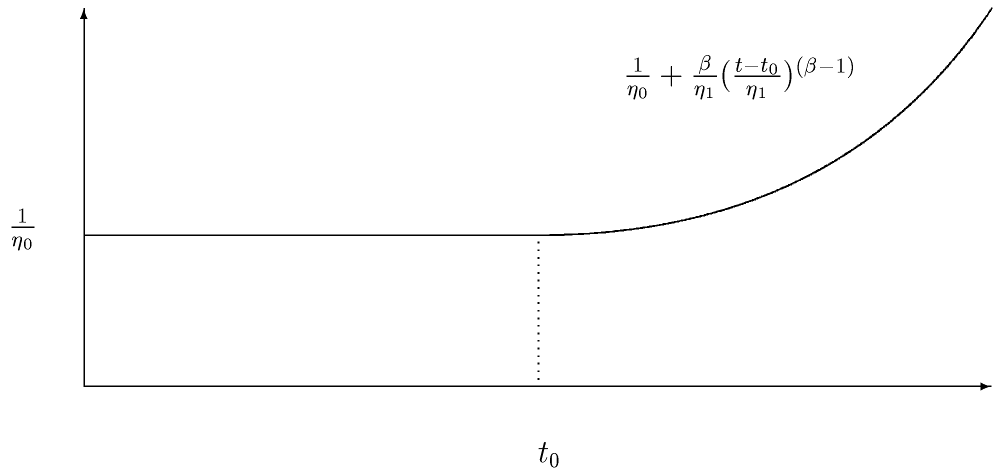
Nous débutons par un rappel de quelques modèles de vieillissement dans le cadre des matériels réparables. Citons pour commencer différentes possibilités pour définir une intensité de défaillance croissante dans un processus de Poisson :

- $\lambda(t) = e^{\alpha+\beta t}$ où $\beta > 0$
- $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ où $\beta > 1$

Le deuxième cas correspond au processus de Weibull. Rappelons que, pour ce processus, seul le premier temps inter-défaillance suit une loi de Weibull. Mais ces modèles ne font pas intervenir de date de début de vieillissement. Au contraire, le modèle, développé par Raftery et Ackman cf. [45], définit une intensité à deux paliers : elle est d'abord égale à λ_1 jusqu'à un instant τ, puis elle change de niveau au-delà de τ pour se fixer à une hauteur λ_2. Nous allons voir que notre modélisation est une généralisation de celle-ci.

4.2 Présentation de notre modèle

Afin de pouvoir étudier spécifiquement l'instant de vieillissement d'un matériel réparable nous modélisons le processus des défaillances successives par un processus de Poisson non homogène dont l'intensité est choisie de la manière suivante :



Elle est constante, égale à $\frac{1}{\eta_0}$, jusqu'à un instant de vieillissement noté t_0 (ce qui traduit une absence de vieillissement), puis elle augmente suivant une fonction de la forme $\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}(\frac{t-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)}$ ce qui traduit alors un vieillissement. On peut noter que la forme de ce vieillissement comporte un terme (le second) que l'on retrouve dans un processus de Weibull.

Cette intensité ainsi définie est donc la somme de deux fonctions : l'une constante égale à $\frac{1}{\eta_0}$ et l'autre nulle jusqu'à l'instant t_0 puis ensuite égale à $\frac{\beta}{\eta_1}(\frac{t-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)}$.

Nous pouvons donc en déduire que le processus de Poisson correspondant est une superposition de deux processus de Poisson :

- l'un d'intensité constante est donc un processus de Poisson homogène
- l'autre d'intensité correspondant à la deuxième fonction définie plus haut est un processus de Weibull qui ne se déclenche qu'à partir de t_0.

En définitive, notre processus permet donc de décrire des défaillances accidentelles jusqu'à t_0, puis des défaillances pouvant être soit accidentelles soit provenant du vieillissement du matériel.

4.3 Calcul de quelques caractéristiques de ce processus

Intensité de défaillance du processus

Elle s'écrit :

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{\eta_0} & \text{si} \quad t \leq t_0 \\ \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}(\frac{t-t_0}{\eta_1})^{(\beta-1)} & \text{si} \quad t > t_0 \end{cases}$$

Loi de N_t

On note N_t le nombre de défaillances du processus jusqu'à l'instant t.
N_t suit évidemment une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$.
Ici, $\Lambda(t) = \frac{1}{\eta_0}t + (\frac{t-t_0}{\eta_1})^{\beta} 1_{[t_0,+\infty[}(t)$.

Loi des instants de défaillances

Remarquons d'abord que les temps inter-défaillances ne sont pas indépendants.
On note T_i la date à laquelle a lieu la i-ème défaillance.
Soit $F_{T_{n+1}/T_1=t_1,\dots,T_n=t_n}$ la fonction de répartition de la loi conditionnelle de T_{n+1} :
$F_{T_{n+1}/T_1=t_1,\dots,T_n=t_n}(t) = 1 - e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(t_n))}$

Simulation du processus

Notre processus étant une superposition d'un processus de Poisson homogène et d'un processus de Weibull, il s'agit simplement de simuler ces

deux processus sous-jacents.
Pour le processus de Poisson homogène de cadence $\frac{1}{\eta_0}$, il est classique de simuler les temps inter-défaillances, qui suivent indépendamment des lois exponentielles d'espérance η_0.
Pour le processus de Weibull, nous utilisons la loi des instants successifs de défaillance telle qu'elle a été présentée au paragraphe précédent. La première défaillance est tirée dans une loi de Weibull à trois paramètres (t_0, η_1, β) puis les défaillances suivantes sont obtenues grâce à la loi conditionnelle de T_{n+1} :

$$F_{T_{n+1}/T_1=t_1,\dots,T_n=t_n}(t) = 1 - e^{-\left(\left(\frac{t-t_0}{\eta_1}\right)^\beta - \left(\frac{t_n-t_0}{\eta_1}\right)^\beta\right)}.$$

En utilisant la méthode de l'inversion et en notant u_{n+1} un nombre au hasard entre 0 et 1, on obtient la réalisation de T_{n+1} :

$$t_{n+1} = t_0 + \eta_1 \left(-log(u_{n+1}) + \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Pour l'instant de la première défaillance, on a :

$$t_1 = t_0 + \eta_1(-log(u_1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Calcul du MTTF

Le $MTTF$ (Mean Time To Failure) à l'instant t est l'espérance du temps d'attente de la prochaine défaillance à partir de l'instant t.

$$MTTF_t = \int_0^{+\infty} e^{-(\Lambda(t+u)-\Lambda(t))} du.$$

Nous pouvons mener les calculs dans le cas où $\beta = 2$.

cas : $t \leq t_0$

$$\begin{aligned} MTTF_t &= \int_0^{t_0-t} e^{-\frac{1}{\eta_0}u} du + \int_{t_0-t}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}(t+u)+(\frac{t+u-t_0}{\eta_1})^2-\frac{1}{\eta_0}t\right)} du \\ &= \eta_0\left(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)}\right) + \int_{t_0-t}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}u+(\frac{t+u-t_0}{\eta_1})^2\right)} du \\ &= \eta_0\left(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)}\right) + \eta_1 \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}(\eta_1 v+t_0-t)+v^2\right)} dv \\ &= \eta_0\left(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)}\right) + \eta_1 e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)+\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right)^2} \int_0^{+\infty} e^{-\left(v+\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right)^2} dv \\ &= \eta_0\left(1-e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)}\right) + \eta_1 e^{-\frac{1}{\eta_0}(t_0-t)+\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right) \end{aligned}$$

cas : $t > t_0$

$$\begin{aligned} MTTF_t &= \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{\eta_0}u+(\frac{t+u-t_0}{\eta_1})^2-(\frac{t-t_0}{\eta_1})^2\right)} du \\ &= e^{(\frac{t-t_0}{\eta_1})^2+\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right)^2+\frac{t-t_0}{\eta_0}} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{u+t-t_0}{\eta_1}+\frac{\eta_1}{2\eta_0})^2} du \\ &= e^{\left(\frac{t-t_0}{\eta_1}+\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right)^2} \eta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{t-t_0}{\eta_1}+\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right) \end{aligned}$$

4.4 Estimation

4.4.1 Écriture de la vraisemblance

Nous rappelons que la vraisemblance des données provenant d'un processus de Poisson d'intensité générale $\lambda(t)$ s'écrit :

$L = \left[\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)\right] \times e^{-\int_0^{t_n} \lambda(t)dt}.$

Ici, l'intensité n'ayant pas la même forme avant et après t_0, il faut distinguer la position de t_0 par rapport aux n instants de défaillances. Pour des raisons de simplicité de calcul, nous serons souvent amenés à fixer t_0

sur l'un des instants t_i. Dans le cas général où t_0 est quelconque, cela donne $n+1$ formes possibles pour la vraisemblance, que nous notons L_i lorsque l'on observe i défaillances inférieures ou égales à t_0 .

L_i s'écrit alors :
$L_i = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^i \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{t_j - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{1}{\eta_0}t_n - \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^\beta}$

4.4.2 Maximisation de la vraisemblance

Comme nous avons fixé t_0 (conditionnellement aux données), la recherche de notre estimateur peut se formuler ainsi :
$\max_{t_0}(max(L_i(\eta_0, \eta_1, \beta)))$.
Or la vraisemblance n'est pas bornée. Nous allons montrer qu'il existe un chemin dans l'espace des paramètres qui conduit à une vraisemblance infinie lorsque β tend lui-même vers l'infini.

Preuve :

Ici t_0 est un réel positif quelconque fixé, mais plus nécessairement sur un t_i. La vraisemblance des données s'écrit :

$$L = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{t_{(j)} - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right]$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{\eta_0}t_n - \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^\beta}$$

où i est le nombre d'observations de l'échantillon qui se situent avant l'instant t_0.

D'où la log-vraisemblance :
$\ln L = -n \ln \eta_0 + \left[\sum_{j=i+1}^{n} \ln\left(1 + \beta\frac{\eta_0}{\eta_1}\left(\frac{t_{(j)} - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] - \frac{1}{\eta_0}t_n - \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^\beta$

Fixons maintenant η_0 qui peut prendre une valeur quelconque et choisissons $\widetilde{\eta_1} = (t_n - t_0)$.

Au point $(\eta_0, \widetilde{\eta_1}, \beta)$:

$$\ln L > -n \ln \eta_0 + \ln \left(1 + \beta \frac{\eta_0}{\widetilde{\eta_1}} \left(\frac{t_n - t_0}{\widetilde{\eta_1}}\right)^{\beta-1}\right) - \frac{1}{\eta_0} t_n - 1$$

or

$$1 + \beta \frac{\eta_0}{\widetilde{\eta_1}} \left(\frac{t_n - t_0}{\widetilde{\eta_1}}\right)^{\beta-1} = 1 + \beta \frac{\eta_0}{t_n - t_0} \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad \beta \to +\infty.$$

Par conséquent $\ln L$ est infinie lorsque $\beta \to +\infty$.

4.4.3 Estimateur du maximum de vraisemblance

A la suite du résultat précédent, nous sommes amenés à considérer β comme un paramètre fixe et connu (par exemple $\beta = 2$) pour pouvoir utiliser la procédure du maximum de vraisemblance. Les résultats de simulation sont bons si les tailles d'échantillon sont suffisantes.

4.4.4 Algorithme EM

Afin de s'affranchir de la condition β fixé, nous proposons d'utiliser l'algorithme EM pour trouver une solution de l'équation de vraisemblance. Les résultats de simulation laissent penser que les estimateurs obtenus sont convergents. Nous présentons maintenant l'algorithme EM dans notre contexte.

Mise en place de l'algorithme EM

Nous supposons observer n instants de défaillance sur un matériel réparable, notés $y = (t_1, ..., t_n)$. Le paramètre θ de notre modèle de vieillissement est (η_0, η_1, β) et t_0 est fixé à une valeur quelconque.
Pour simplifier les formules, nous notons :

- $\lambda_E(t) = \frac{1}{\eta_0}$ l'intensité de défaillance du processus de Poisson homogène

– $\lambda_W(t) = \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{t-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1} 1_{[t_0,+\infty[}(t)$ l'intensité de défaillance du processus de Weibull

Ici les données manquantes sont les indicateurs z_i qu'une défaillance est accidentelle (i.e. provient du processus de Poisson homogène sous-jacent, $z_i = 1$) ou bien due au vieillissement (i.e provient du processus de Weibull sous-jacent, $z_i = 0$).
Les données observées sont les t_i et les $x_i = (\ t_i, z_i)$ constituent les données complètes.

La log-vraisemblance complète s'écrit :

$$
\begin{aligned}
l_x(\theta) &= \ln\left[\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_E^{z_i}(t_i)\lambda_W^{1-z_i}(t_i)\right)e^{-\frac{1}{\eta_0}t_n-\left(\frac{t_n-t_0}{\eta_1}\right)^\beta}\right] \\
l_x(\theta) &= \left[\sum_{i=1}^{n} z_i\ln\left(\lambda_E(t_i)\right)+(1-z_i)\ln\left(\lambda_W(t_i)\right)\right]-\frac{1}{\eta_0}t_n-\left(\frac{t_n-t_0}{\eta_1}\right)^\beta
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant l'espérance conditionnelle $Q(\theta/\tilde{\theta})$.

$$
\begin{aligned}
Q(\theta/\tilde{\theta}) &= E\left(l_x(\theta)\ /\ y,\tilde{\theta}\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} E\left(z_i/y,\tilde{\theta}\right)\ln\left(\lambda_E(t_i)\right)+E\left(1-z_i/y,\tilde{\theta}\right)\ln\left(\lambda_W(t_i)\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\eta_0}t_n-\left(\frac{t_n-t_0}{\eta_1}\right)^\beta \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}(t_i)\ln\left(\lambda_E(t_i)\right)+(1-\widetilde{p}(t_i))\ln\left(\lambda_W(t_i)\right)\right]-\frac{1}{\eta_0}t_n-\left(\frac{t_n-t_0}{\eta_1}\right)^\beta
\end{aligned}
$$

où

$\widetilde{p}(t_i) = E\left(z_i/y, \tilde{\theta}\right) = P\left(z_i = 1/t_i, \tilde{\theta}\right) = \frac{\lambda_E(t_i)}{\lambda_E(t_i)+\lambda_W(t_i)}$
Rq : Si $t_i \leq t_0$, alors $\widetilde{p}(t_i)$ est naturellement égal à 1.

En définitive, l'espérance conditionnelle $Q(\theta/\tilde{\theta})$ peut se scinder en deux parties, l'une concernant le processus de Poisson homogène, $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$, et l'autre concernant le processus de Weibull, $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$:

$$Q(\theta/\tilde{\theta}) = Q_E(\theta/\tilde{\theta}) + Q_W(\theta/\tilde{\theta})$$

avec

$$Q_E(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[\widetilde{p}(t_i) \ln\left(\lambda_E(t_i)\right)\right]\right] - \frac{1}{\eta_0} t_n$$
$$Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left[(1-\widetilde{p}(t_i)) \ln\left(\lambda_W(t_i)\right)\right]\right] - \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}$$

Tout comme pour le cas d'un matériel non réparable, l'étape maximisation est maintenant facilitée par la décomposition de $Q(\theta/\tilde{\theta})$. En effet, il s'agit de maximiser séparément $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$ et $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$, puisque $Q_E(\theta/\tilde{\theta})$ (respectivement $Q_W(\theta/\tilde{\theta})$) ne fait intervenir que le paramètre η_0 (les paramètres $\eta_1$et β).

Pour le premier terme :

$$Q_E(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(t_i) \ln\left(\frac{1}{\eta_0}\right)\right] - \frac{1}{\eta_0} t_n.$$

La maximisation par rapport à η_0 de cette quantité donne

$$\hat{\eta_0} = \frac{t_n}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}(t_i)}.$$

Ensuite, pour le deuxième terme :

$$Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i \in I} (1-\widetilde{p}(t_i)) \ln\left(\frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{t_i - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] - \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^{\beta}$$

où I est l'ensemble des indices pour lesquels $t_i \geq t_0$.

En dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i)) \left(\frac{-\beta}{\eta_1}\right)\right] + \beta \, (t_n - t_0)^\beta \, \eta_1^{-\beta - 1}$$

qui s'annule en $\eta_1 = \frac{(t_n - t_0)}{\left[\sum\limits_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i))\right]^{\frac{1}{\beta}}}$.

De même :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = \left[\sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i)) \left(\frac{1}{\beta} + \ln\left(\frac{t_i - t_0}{\eta_1}\right)\right)\right] - \ln\left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right) \left(\frac{t_n - t_0}{\eta_1}\right)^\beta.$$

$\frac{\partial}{\partial \beta} Q_W(\theta/\tilde{\theta}) = 0$ donne l'équation de vraisemblance suivante (en utilisant la relation précédente qui lie η_1 à β) :

$$\frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i)) + \sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i)) \ln\left(\frac{t_i - t_0}{(t_n - t_0)} \left[\sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i))\right]^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

$$- \frac{1}{\beta} \ln\left(\sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i))\right) \left(\sum_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i))\right) = 0$$

D'où :

$$\beta = \frac{\sum\limits_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i))}{\sum\limits_{i \in I} (1 - \widetilde{p}(t_i)) \ln\left(\frac{t_n - t_0}{t_i - t_0}\right)}$$

En définitive, pour notre modèle, l'itération $n+1$ de l'algorithme EM requiert les calculs suivants :

1. calcul des $\widetilde{p}(t_i) = \dfrac{\frac{1}{\eta_0^{(n)}}}{\frac{1}{\eta_0^{(n)}} + \frac{\beta^{(n)}}{\eta_1^{(n)}} \left(\frac{t_i - t_0}{\eta_1^{(n)}}\right)^{\beta^{(n)} - 1} 1_{[t_0, +\infty[}(t_i)}$.
2. calcul de $\eta_0^{(n+1)} = \frac{t_n}{\sum_{i=1}^n \widetilde{p}(t_i)}$.

3. calcul de $\beta^{(n+1)} = \frac{\sum\limits_{i \in I} (1-\widetilde{p}(t_i))}{\sum\limits_{i \in I} (1-\widetilde{p}(t_i)) \ln\left(\frac{t_n - t_0}{t_i - t_0}\right)}$.

4. calcul de $\eta_1^{(n+1)} = \frac{(t_n - t_0)}{\left[\sum\limits_{i \in I} (1-\widetilde{p}(t_i))\right]^{\frac{1}{\beta^{(n+1)}}}}$.

Utilisation de l'algorithme EM

Dans notre contexte et dans un premier temps, nous utilisons l'algorithme EM pour trouver une approximation de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas où t_0 est fixé (dans l'ensemble des valeurs $x_{(i)}$ ou bien plus généralement dans un ensemble de valeurs quelconques). Nous calculons ensuite la vraisemblance obtenue dans chacun des cas correspondant aux t_0 différents. Nous choisissons alors le cas t_0 qui maximise la vraisemblance et la valeur du paramètre obtenue dans ce cas, comme estimation de la vraie valeur du paramètre.

4.5 Test de l'existence du vieillissement

4.5.1 Définition de la région critique

Nous nous intéressons maintenant au problème de l'existence du vieillissement pour un matériel réparable. De manière plus précise, nous souhaitons savoir s'il existe un instant t_0 à partir duquel le vieillissement se fait sentir. Les deux hypothèses qui s'affrontent sont donc les suivantes :

- soit les défaillances sont purement accidentelles
- soit elles proviennent d'un mécanisme qui intègre un vieillissement à partir d'un instant t_0.

Nous définissons donc le test d'hypothèses suivant :

$$\begin{cases} H_0 : & \text{le processus de Poisson est homogène} \\ H_1 : & \text{le processus est régi par notre modèle} \end{cases}$$

Pour donner une réponse à ce test, nous reprenons dans un premier temps la discussion sur la vraisemblance des données que nous avons entamée au paragraphe 1.3.1.
Nous imposons ici les deux contraintes suivantes à notre modèle :

1. β est fixé (car sinon la vraisemblance est infinie).
2. t_0 est fixé sur l'un des t_i.

L_i s'écrit donc ici :

$$\mathrm{L}_i = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^i \times \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(\frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1}\left(\frac{t_j - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{1}{\eta_0}t_n - \left(\frac{t_n - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

En remarquant que le cas $t_0 = t_n$ (qui correspond à un processus de Poisson homogène) donne $\mathrm{L}_n = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\eta_0}t_n}$, on peut écrire :

$$L_i = L_n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(1 + \beta\frac{\eta_0}{\eta 1}\left(\frac{t_j - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\left(\frac{t_n - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

Nous notons désormais :

$$R_i\left(\eta_0, \eta_1\right) = \left[\prod_{j=i+1}^{n}\left(1 + \beta\frac{\eta_0}{\eta 1}\left(\frac{t_j - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\left(\frac{t_n - t_i}{\eta_1}\right)^{\beta}}$$

qui s'interprète donc comme le rapport des vraisemblances : $\frac{L_i}{L_n}$.

Nous proposons alors la région critique suivante, comme réponse au test d'hypothèses ci-dessus :

W=$\{\max \ R_i(\eta_0, \eta_1) \geq K\}$

où $\max \ R_i(\eta_0, \eta_1)$ est donc notre variable de décision. Le maximum est pris pour i variant de 0 à n, puisque nous cherchons à comparer les L_i (pour $i = 1, ..., n$) avec L_n qui correspond à l'absence de vieillissement. Une forte valeur de notre variable de décision plaide ainsi en faveur de l'hypothèse d'un vieillissement (H_1).

Nous montrons maintenant la propriété essentielle suivante :

La loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0.

Pour cela, nous distinguons deux cas, suivant si η_0 est connu ou inconnu. Dans ce deuxième cas, nous proposerons une modification de la variable de décision pour garder l'indépendance de la loi par rapport à η_0 .

4.5.2 Preuve de l'indépendance de la loi de la variable de décision sous H_0

Cas η_0 connu

La maximisation de $R_i(\eta_0, \eta_1)$ se fait donc ici par rapport à i et η_1.

On note $a_j^i = \frac{t_j - t_i}{\eta_0}$ et $k = \frac{\eta_1}{\eta_0}$,
d'où :
$R_i(\eta_0, \eta_1) = \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{k^\beta} \left(a_j^i \right)^{\beta - 1} \right) \right] \times e^{-\frac{1}{k^\beta} \left(a_n^i \right)^\beta}$

Lorsque i est fixé, $R_i(\eta_0, k)$ est maximum pour une valeur de k qui dépend du vecteur $(a_{i+1}^i, a_{i+2}^i, ..., a_n^i)$. On a :

$\max R_i(\eta_0, k) = \max_i \max_k R_i(\eta_0, k)$, d'où $\max R_i(\eta_0, k)$ est une fonction du vecteur constitué de la collection complète des a_j^i , c'est-à-dire que

$\max R_i(\eta_0, k) = h(a_2^1, a_3^1, ..., a_n^1, a_3^2, ..., a_n^2, ..., a_n^{n-1})$.

Or le vecteur $(a_2^1, a_3^1, ..., a_n^1, a_3^2, ..., a_n^2, ..., a_n^{n-1})$ est une transformation linéaire simple du vecteur des temps inter-défaillances successifs normalisés $(\frac{t_2 - t_1}{\eta_0}, \frac{t_3 - t_2}{\eta_0}, ...)$.

Sous H_0, ce dernier vecteur aléatoire est constitué de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1 (ceci découle des propriétés classiques du processus de Poisson homogène).

En définitive, sous H_0, la loi de $\max R_i(\eta_0, k)$ ne dépend pas de η_0.

Cas η_0 inconnu

Nous proposons, dans ce cas, une maximisation un peu différente qui nous permettra de conserver la propriété essentielle que la loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0.
Tout d'abord, nous choisissons d'estimer le paramètre η_0, dans chaque cas où $t_0 = t_i$, au moyen de $\hat{\eta}_{0,i}$ défini par :

$$\hat{\eta}_{0,i} = \frac{t_i}{i}.$$

Ceci revient à utiliser seulement la partie du processus située avant t_0 (naturellement la plus intéressante) pour estimer le paramètre η_0.

Ensuite nous maximisons R_i, pour $i = 1, ..., n-1$, ce qui revient à résoudre $\max R_i(\hat{\eta}_{0,i}, k)$ où $k = \frac{\eta_1}{\eta_0}$. Numériquement, la maximisation ne pose pas de problème, mais il reste à prouver que, ce faisant, la loi de $\max R_i(\hat{\eta}_{0,i}, k)$, comme dans le cas précédent où η_0 était connu, ne dépend pas de la vraie valeur de η_0.

Nous rappelons que, comme nous l'avons défini précédemment :
$R_i(\eta_0, \eta_1) = \frac{L_i}{L_n}$
avec

$$L_n = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\eta_0} t_n}$$

$$L_i = \left(\frac{1}{\eta_0}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{t_j - t_i}{\eta_0}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{1}{\eta_0} t_n - \frac{1}{k^\beta}\left(\frac{t_n - t_i}{\eta_0}\right)^\beta}$$

Premièrement, en ce qui concerne L_n, nous estimons η_0 par $\hat{\eta}_{0,n} = \frac{t_n}{n}$.
Puis, pour L_i, nous estimons η_0 par $\hat{\eta}_{0,i} = \frac{t_i}{i}$.
Nous avons donc, R_i ne dépendant plus que de k :

$$R_i(k) = \frac{\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{t_j - t_i}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{1}{\hat{\eta}_{0,i}} t_n - \frac{1}{k^\beta}\left(\frac{t_n - t_i}{\hat{\eta}_{0,i}}\right)^\beta}}{\left(\frac{1}{\hat{\eta}_{0,n}}\right)^n \times e^{-\frac{1}{\hat{\eta}_{0,n}} t_n}}$$

et en remplaçant $\hat{\eta}_{0,i}$ et $\hat{\eta}_{0,n}$ par leur valeur respective, nous obtenons :

$$R_i(k) = \frac{\left(\frac{i}{t_i}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1+\frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{t_j-t_i}{t_i}i\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{i}{t_i}t_n-\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{t_n-t_i}{\frac{t_i}{i}}\right)^\beta}}{\left(\frac{n}{t_n}\right)^n \times e^{-\frac{n}{t_n}t_n}}$$

ce qui donne :

$$R_i(k) = \frac{\left(\frac{i}{n}\times\frac{t_n}{t_i}\right)^n \times \left[\prod_{j=i+1}^{n} \left(1+\frac{\beta}{k^\beta}\left(\frac{t_j-t_i}{t_i}i\right)^{\beta-1}\right)\right] \times e^{-\frac{i}{t_i}t_n-\frac{1}{k^\beta}\left(\frac{t_n-t_i}{t_i}i\right)^\beta}}{e^{-n}}$$

Le maximum de $\mathrm{R}_i(k)$, par rapport à i et k, est donc une fonction du vecteur $(\frac{t_1}{t_n}, \frac{t_2}{t_n}, ..., \frac{t_{n-1}}{t_n})$.

Or ce vecteur est aussi un transformé simple du vecteur des temps inter-défaillances successifs normalisés : $(\frac{t_1}{\eta_0}, \frac{t_2-t_1}{\eta_0}, \frac{t_3-t_2}{\eta_0}, ..., \frac{t_n-t_{n-1}}{\eta_0})$ qui, comme on l'a vu précédemment, a une loi indépendante de η_0 sous H_0.

4.5.3 Table des seuils critiques

En définitive, nous avons montré que la loi de notre variable de décision est indépendante de η_0 sous H_0. Cette loi peut donc être étudiée par simulation, pour une valeur de η_0 donnée. Ceci permet alors l'évaluation du seuil K pour un risque α fixé quelconque et également le calcul de la probabilité critique. Nous avons ainsi pu construire une table de seuils critiques pour différentes tailles d'échantillons et pour deux valeurs du risque α, à savoir $\alpha = 10\%$ et $\alpha = 5\%$.

Cette table est construite à partir de 10000 simulations de réalisations d'un processus de Poisson homogène de cadence 1, pour différentes valeurs de n : nombre d'observations.

Voici la table obtenue :

Nombre d'observations n	seuil de 10%	seuil de 5%
$n = 2$	5.05	9.19
$n = 3$	8.07	16.92
$n = 4$	9.72	18.87
$n = 5$	11.35	23.96
$n = 6$	12.25	27.05
$n = 7$	12.88	28.48
$n = 8$	13.70	29.30
$n = 9$	13.76	30.63
$n = 10$	14.86	32.39
$n = 20$	19.30	42.23
$n = 50$	20.50	48.57
$n = 100$	23.28	53.56

4.6 Conclusion

Compte tenu des résultats précédents, nous proposons maintenant une démarche générale, lorsqu'on est confronté à des défaillances observées sur un matériel réparable.

Dans un premier temps, nous testons l'existence du vieillissement, en supposant η_0 inconnu, à moins que l'on dispose d'informations sur l'environnement industriel du matériel qui permettent de connaître la cadence des défaillances accidentelles.

Si le test précédent a permis de conclure à l'existence d'un vieillissement, alors nous estimons les paramètres du modèle $t_0, \eta_0, \eta_1, \beta$ grâce à l'algorithme EM. Là encore, nous pouvons utiliser la maximisation directe de la vraisemblance, si des informations suffisantes sur le matériel permettent de connaître la dynamique de son vieillissement et donc de fixer β.

Si l'on ne peut conclure à l'existence du vieillissement, alors le modèle approprié est le processus de Poisson homogène. On ne peut donc considérer que le matériel est entré dans sa phase de vieillissement.

Chapitre 5

Analyse de données réelles

5.1 Matériel réparable

Trois exemples réels concernant des matériels réparables du secteur nucléaire sont traités ci-après. Les données ont trait à des défaillances complètes, critiques pour la sûreté.

5.1.1 Pompe

Le premier exemple concerne une pompe sur laquelle 6 défaillances successives ont été observées. La première a eu lieu 18 mois après sa mise en service, la seconde 30 mois après sa mise en service et ainsi de suite. L'échantillon des 6 dates de défaillances successives est le suivant :
$(18, 30, 82, 113, 121, 126)$.

Le test de l'existence du vieillissement a tout d'abord été effectué. Notre variable de décision prend la valeur 6.689 et la probabilité critique associée, évaluée par simulation, est égale à 18,2%. Ici, compte tenu du faible nombre de défaillances observées, cette probabilité permet de douter fortement d'une absence de vieillissement. Si l'on passe maintenant à l'estimation des paramètres du modèle au moyen de l'algorithme EM, on obtient les résultats suivants :

- t_0, instant du début de vieillissement, est estimé à 112.95, c'est-à-dire qu'il y a vieillissement à partir de la quatrième défaillance, après 9,4 ans de fonctionnement,
- η_1 est estimée par la valeur $\hat{\eta_1} = 4.9$
- $\hat{\beta} = 1$
- η_0 est estimée par $\hat{\eta_0} = 37.6$

On conclut donc ici à un vieillissement de cette pompe à partir de la quatrième défaillance. Cette conclusion correspond à l'expérience des systèmes sûreté-maintenance du site et à d'autres études faites par ailleurs sur ce type de pompe. Le niveau de fiabilité de ce type de pompe reste cependant tout à fait acceptable.

5.1.2 Chaîne de mesure de la puissance nucléaire

Dans le deuxième exemple, il s'agit de 5 défaillances observées sur une chaîne de mesure de la puissance nucléaire. L'échantillon se présente ainsi : (31,34,109,168,171). Dans un premier temps le test du vieillissement donne une probabilité critique évaluée par simulation à 13% (la variable de décision prend ici la valeur 9.672), ce qui engage à poursuivre par l'estimation des paramètres du modèle de vieillissement. Les résultats sont les suivants :

- t_0, instant de début du vieillissement, est estimé à 167.96, c'est-à-dire qu'il y a vieillissement à partir de la quatrième défaillance.
- η_1 est estimée par la valeur $\hat{\eta_1} = 1.56$
- $\hat{\beta} = 1$
- η_0 est estimée par $\hat{\eta_0} = 55.9$

On peut constater que le vieillissement est diagnostiqué très à droite de l'échantillon, à l'avant dernière défaillance. De plus, la dernière défaillance est très proche, favorisant l'hypothèse d'un vieillissement en fin d'échantillon. On a cependant observé une augmentation légère du taux de défaillance en fonctionnement sur la chaîne de mesure de ce site, depuis, 1984, tout en restant de même ordre de grandeur que la valeur générique du parc. La fiabilité des matériels reste donc correcte.

5.1.3 Vanne pneumatique

Enfin le troisième exemple concerne 4 défaillances observées sur une vanne pneumatique. On dispose de l'échantillon des données suivant (60, 83, 163, 171).
Notre variable de décision prend ici la valeur 4.836 et la probabilité critique est estimée à 17,7%.
Les estimations du modèle de vieillissement sont les suivantes :

- t_0, instant de début du vieillissement, est estimé à 162.92, c'est-à-dire qu'il y a vieillissement à partir de la troisième défaillance, qui comme précédement est l'avant-dernière défaillance, très à droite dans l'échantillon, (le modèle est probablement influencé par la dernière défaillance),

- η_1 est estimée par la valeur $\hat{\eta}_1 = 4.25$

- $\hat{\beta} = 1$

- η_0 est estimée par $\hat{\eta}_0 = 81.5$

Dans ces deux derniers exemples, le vieillissement semble toutefois moins probant que dans le cas du premier exemple car l'instant de vieillissement est estimé à l'extrémité de l'échantillon (c'est-à-dire à l'avant-dernière défaillance). Les experts concluent d'ailleurs à l'absence de vieillissement (qui n'est pas rejeté par le test mis en œuvre) pour les deux matériels. Il faut en effet souligner que la fin de période d'observation est bien postérieure à l'instant de la dernière défaillance et que cette période, longue, de bon fonctionnement des matériels, n'est pas prise en compte dans la modélisation.

5.2 Matériel non réparable

5.2.1 Suivi d'un lot de relais

Il s'agit d'un exemple réel concernant un lot de relais non réparables observés pendant dix années (de 1988 à 1997) sur le site d'une centrale nucléaire. Il y avait au départ 15 matériels parmi lesquels 7 ont connu une défaillance ou une dégradation importante (2 défaillances réelles et 5 dépassements des seuils de protection). Ceux-ci ont alors été remplacés par des matériels neufs (temps de remplacement négligeable). Voici les résultats d'observation :

- 7 défaillances ou dégradations importantes :
  - 3 en 1991
  - 2 en 1994
  - 1 en 1995
  - 1 en 1997
- 15 censures :
  - 8 à 10 ans
  - 3 à 6 ans
  - 2 à 3 ans
  - 1 à 2 ans
  - 1 à 1 an(ou moins)

En prenant comme unité l'année, l'échantillon comporte donc 7 vraies défaillances

$$(4,4,4,7,7,8,9)$$

et 15 censures

$$(1,2,3,3,6,6,6,10,10,10,10,10,10,10,10) \qquad .$$

L'échantillon complet est donc de taille n=22. Le fait qu'il contienne des censures différentes le rend plus difficile à appréhender, notamment en ce qui concerne le test du vieillissement. L'estimation directe des paramètres du modèle de vieillissement donne les résultats suivants :

- t_0, instant de début du vieillissement, est estimé à 3.9, c'est-à-dire qu'il y a vieillissement à partir de la première défaillance.
- η_1 est estimée par la valeur $\hat{\eta_1} = 10.1$ ans
- $\hat{\beta} = 1$
- η_0 est estimée par $\hat{\eta_0} = \infty$.

La valeur de β (égale à 1) indique donc que nous sommes en présence d'un modèle de Clarotti à deux paliers. Mais le fait que η_0 est infinie montre que le premier palier est au niveau 0. Nous sommes donc en face d'une loi exponentielle, mais décalée en $t_0 = 3.9$. Par ailleurs les experts concluent également à une absence de vieillissement, d'autant plus que le constructeur estime le MTBF à 375 ans (± 32), ce qui est plutôt optimiste, le MTBF opérationnel étant évalué à 75 ans. Le résultat obtenu par la modélisation semble donc cohérent avec les opinions d'experts.

5.2.2 Un historique de données de fatigue de centrales nucléaires

Age(years)	Reactor-years at this age	Leak events caused by thermal fatigue
0.0-1.0	215.2	Civaux 1 5/98
1.0-2.0	211.6	
2.0-3.0	210.2	
3.0-4.0	208.6	
4.0-5.0	206.5	Crystal River 3 1/82
5.0-6.0	202.3	
6.0-7.0	200.4	Farley 2 12/87
7.0-8.0	198.0	
8.0-9.0	193.6	
9.0-10.0	188.3	
10.0-11.0	178.1	
11.0-12.0	167.3	Dampierre 2 9/92
12.0-13.0	153.5	
13.0-14.0	136.3	Tihange 1 6/88 ; Genkai 1 6/88 ; Loviisa 2 5/94
14.0-15.0	121.8	
15.0-16.0	110.0	
16.0-17.0	100.9	Dampierre 1 12/96 ; Loviisa 2 1/97
17.0-18.0	86.4	Obrigheim /86
18.0-19.0	74.7	Biblis-B 2/95
19.0-20.0	70.3	
20.0-21.0	63.4	
21.0-22.0	55.3	Three Mile Island 1 9/95
22.0-23.0	47.3	
23.0-24.0	39.3	Oconee 2 4/97
24.0-25.0	25.5	
25.0-26.0	16.3	
26.0-27.0	11.2	
27.0-28.0	8.2	
28.0-29.0	5.4	
29.0-30.0	2.7	
30.0-31.0	0.2	

Le dernier exemple de données concerne des événements survenus dans le parc des centrales nucléaires REP dans le monde. Les défaillances sont ici des fuites causées par la fatigue thermique. Elles ont été recensées par Atwwod cf. [6]. Compte tenu de ces données, nous disposons d'un échantillon qui se présente sous la forme

$$(1,1,1,1,1,2,3,3,4,4...,30)$$

où, par exemple, parmi les cinq observations égales à 1 figurent une vraie défaillance et quatre censures.

L'estimation du modèle de vieillissement donne les résultats suivants :

- t_0, instant du début de vieillissement, est estimé à 13.9 ans.
- η_1 est estimée par la valeur $\hat{\eta_1} = 113.6$ ans
- $\hat{\beta} = 1$
- η_0 est estimée par $\hat{\eta_0} = 700.4$ ans

En remarque, signalons l'interprétation suivante de η_0 : si les centrales nucléaires ne subissaient aucun vieillissement, leurs durées de vie moyennes seraient de 700 ans (autrement dit il arriverait une défaillance accidentelle en moyenne tous les 700 ans).

5.3 Analyse d'une table de mortalité

5.3.1 Une table de mortalité

Voici la table de mortalité prospective de l'INSEE pour 100000 individus nés en 1993.

âge	nombre de survivants
0	100000
1	99471
2	99277
3	99246
4	99220
5	99197
6	99182
7	99167
8	99152
9	99138
10	99124
11	99115
12	99104
13	99091
14	99076
15	99058
16	99037
17	99012
18	98983
19	98952
20	98920
21	98887
22	98854
23	98819
24	98784
25	98750
26	98717
27	98684
28	98651
29	98618
30	98585
31	98551
32	98517
33	98483
34	98446
35	98408
36	98367
37	98324
38	98278
39	98229

âge	nombre de survivants
40	98177
41	98122
42	98064
43	98002
44	97936
45	97866
46	97791
47	97711
48	97627
49	97536
50	97438
51	97333
52	97219
53	97097
54	96969
55	96836
56	96699
57	96555
58	96407
59	96258
60	96108
61	95959
62	95809
63	95661
64	95504
65	95341
66	95169
67	94989
68	94800
69	94584
70	94337
71	94052
72	93726
73	93350
74	92912
75	92400
76	91803
77	91105
78	90290
79	89356

âge	nombre de survivants
80	88285
81	87058
82	85656
83	84054
84	82261
85	80258
86	78025
87	75544
88	72797
89	69814
90	66588
91	63116
92	59400
93	55450
94	51362
95	47162
96	42883
97	38566
98	34255
99	30004
100	25868
101	21907
102	18179
103	14740
104	11640
105	8917
106	6597
107	4687
108	3177
109	2038
110	1224
111	680
112	343
113	154
114	59
115	19
116	4
117	1

5.3.2 Analyse

Tout d'abord remarquons que ces données sortent du domaine industriel dans lequel nous nous sommes placés depuis le début. Toutefois, la variable aléatoire sous-jacente mesurant la durée de vie d'individus, nous sommes dans un cadre analogue à celui d'un matériel non réparable. Notre modèle de vieillissement semble a priori bien s'appliquer dans le cas humain, puisque le décès d'un individu peut s'expliquer soit par une cause accidentelle soit par une cause liée à un vieillissement du corps.

Estimation du Maximum de Vraisemblance

Dans un premier temps nous utilisons l'algorithme EM pour estimer les paramètres de notre modèle. Les résultats sont les suivants :

- $t_0 = 0$ an
- $\hat{\beta} = 12.4$
- $\hat{\eta_1} = 97.4$ ans
- $\hat{\eta_0} = 1662$ ans

La log-vraisemblance du modèle en ce point s'élève à -3.7839×10^5 .

Remarquons que la valeur de η_0 obtenue indique qu'en l'absence du vieillissement l'être humain aurait une espérance de vie de 1662 ans !

Nous avons ensuite procédé à la maximisation directe de la vraisemblance dans le cas particulier où le paramètre β est fixé à 2. On obtient :

- $t_0 = 79.5$ ans
- $\hat{\eta_1} = 17.3$ ans

– $\hat{\eta_0} = 653.1$ ans

La log-vraisemblance du modèle en ce point s'élève à -3.9003×10^5 .

En fixant la valeur de β égal à 2, il semble donc que l'estimation du paramètre t_0, instant du début de vieillissement, ait été affinée.
Par contre, d'un point de vue global, l'ajustement du modèle par l'algorithme EM est meilleur (bien sûr, cela est lié à la dimension supplémentaire que l'on autorise dans le modèle).
Compte tenu de ces résultats, nous avons finalement relancé l'algorithme EM en fixant la valeur de t_0 à 79.5 ans. Cela donne les nouvelles estimations suivantes :

– $\hat{\beta} = 1.50$

– $\hat{\eta_1} = 16.60$ ans

– $\hat{\eta_0} = 676.1$ ans

La log-vraisemblance du modèle en ce point s'élève à -3.9783×10^5 .
Nous constatons alors une estimation du paramètre β plus habituelle.

Il est également intéressant de comparer ces estimations avec celles que l'on peut obtenir dans le cadre d'un modèle de Weibull simple (ce qui revient à ne considérer que les causes de décès dues au vieillissement). La maximisation de la vraisemblance dans ce cas nous fournit les estimations suivantes :

– $\hat{\beta} = 7.9$

– $\hat{\eta_1} = 95.5$ ans

Il faut souligner ici qu'il a été nécessaire de décaler les 529 premiers décès de 0 an à 0,5 an. Ceci, afin de pouvoir utiliser la méthode du Maximum de

Vraisemblance. Dans la foulée, signalons que cette difficulté d'estimation nous semble liée au fait que le taux de défaillance d'une loi de Weibull démarre à l'origine au niveau 0, ce qui semble incompatible avec des observations égales à 0. Notre modélisation, au contraire, autorise le taux de défaillance à débuter à un niveau quelconque que nous avons noté $\frac{1}{\eta_0}$ (qui est à estimer).

Nous traçons sur la figure 5.1 les trois courbes de survie obtenues :

- la première avec la table de mortalité
- la seconde avec notre modèle estimé (procédure EM)
- la troisième avec le modèle de Weibull simple

On observe que la courbe de survie associée à notre modèle épouse parfaitement la courbe de survie donnée par la table de mortalité. Au contraire la courbe de survie dans le cas d'un modèle de Weibull simple semble peiner à s'ajuster.

Ajustement par les Moindres Carrés

La forme très simple des fonctions de survie aussi bien dans notre modèle que dans celui de Weibull nous conduit à effectuer les estimations des paramètres par la méthode des moindres carrés.

Rappelons tout d'abord ces fonctions de survie :

- dans le cas de Weibull $S(x) = e^{-(\frac{x}{\eta_1})^\beta}$
- dans notre modèle $S(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\eta_0}x} & \text{si } x \leq t_0 \\ e^{-\frac{1}{\eta_0}x} e^{-(\frac{x-t_0}{\eta_1})^\beta} & \text{si } x > t_0 \end{cases}$

Les estimateurs des Moindres Carrés des paramètres de notre modèle sont les suivants :

- $t_0 = 1$
- $\hat{\beta} = 12.2$
- $\hat{\eta_1} = 96.9$ ans
- $\hat{\eta_0} = 1800$ ans

Pour le modèle de Weibull, on obtient :

- $\hat{\beta} = 10.9$
- $\hat{\eta_1} = 97.3$ ans

Ces résultats appellent deux remarques. Premièrement, l'estimateur des Moindres Carrés de t_0 n'est plus en 0 mais est décalé en 1, ce qui peut s'expliquer par la mortalité infantile très élevée la première année. Deuxièmement, nous constatons que la courbe de survie associée au modèle de Weibull semble maintenant mieux s'ajuster (ce qui peut s'expliquer par la difficulté déjà évoquée précédemment dans ce cas de tenir compte des 0 de l'échantillon, dans la maximisation de la vraisemblance).

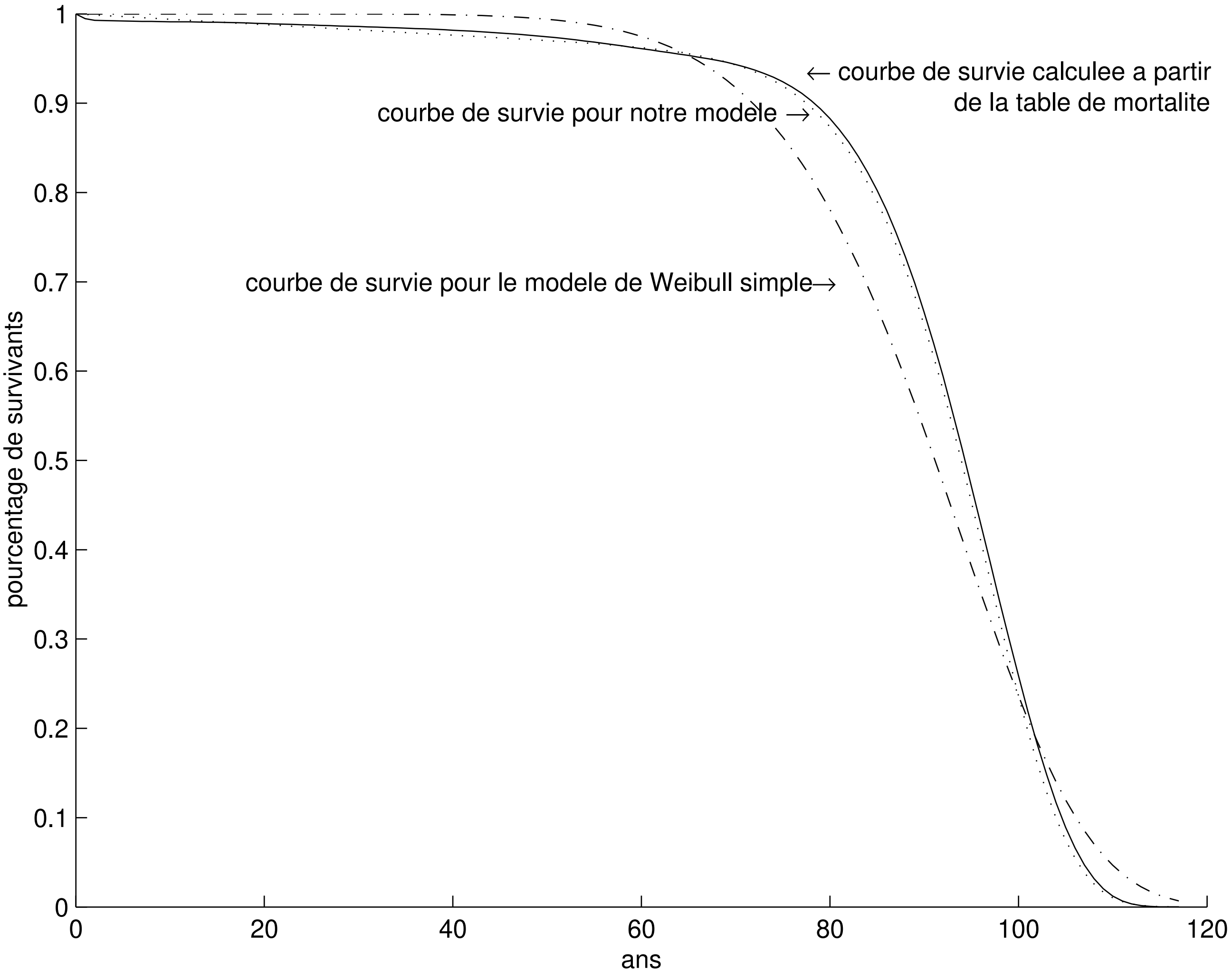


FIG. 5.1: Courbes de survie obtenues en utilisant des estimations du Maximum de Vraisemblance.

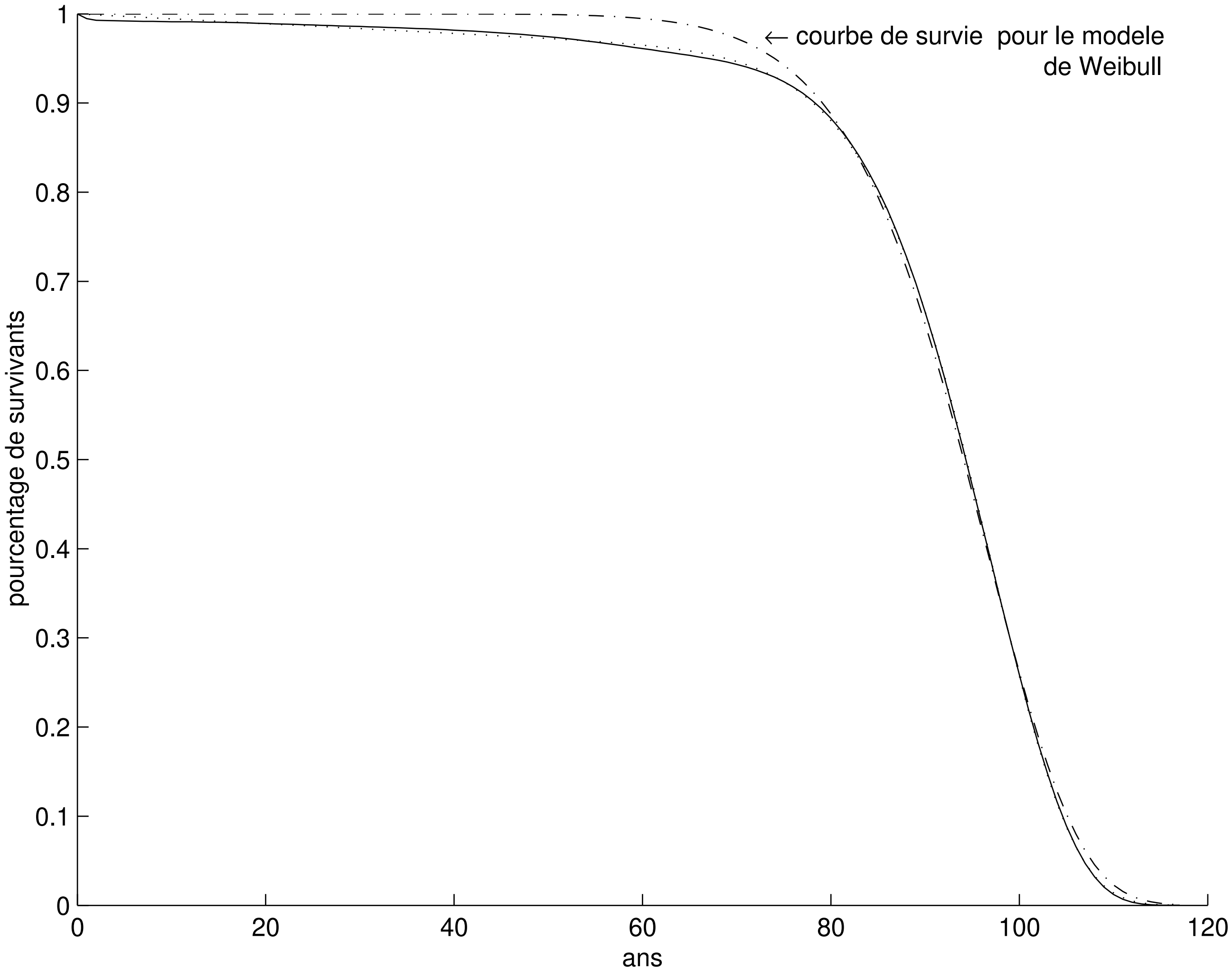


FIG. 5.2: Courbes de survie obtenues en utilisant des estimations des Moindres Carrés.

Conclusion

Cette étude a permis dans un premier temps de recenser les tests existants de constance du taux de défaillance puis de développer une stratégie de détection d'une éventuelle évolution de ce taux de défaillance (une évolution défavorable la plupart du temps, c'est-à-dire un vieillissement). Cette stratégie s'appuie sur un modèle que nous avons proposé pour le cas d'un matériel réparable et pour le cas d'un matériel non réparable. Notre modélisation est plus générale que celle de Weibull et, nous semble-t-il, rend mieux compte de la réalité. Les résultats obtenus avec des données réelles montrent qu'il est possible d'effectuer des estimations et des tests dans ce modèle de vieillissement tel que nous l'avons défini. Toutefois, dans le cas d'un petit nombre de données, l'estimation de tous les paramètres (et notamment du paramètre β) reste délicate. En effet, dans nos exemples à faible effectif, nous constatons que le paramètre β n'a pas pu "décoller" de 1 (lorsque l'on utilisait l'algorithme EM).
Afin de pallier cette difficulté, il est possible d'étendre l'étude que nous avons faite dans plusieurs directions. En tout premier lieu, on pense évidemment à la voie bayésienne informative qui permet l'utilisation de toute information a priori disponible. Il faudrait probablement pour cela prendre en compte, de manière plus importante encore, le retour d'expérience. En conséquence, cela entraînerait sans doute une amélioration de la qualité des estimateurs. Il reste néanmoins l'obstacle constitué par la difficulté d'intégrer les lois a priori dans les calculs, notamment pour ce qui concerne le paramètre t_0.
Une tout autre orientation à explorer, plus particulièrement dans le cas de

matériels réparables, serait l'étude de processus plus complexes à manipuler que les processus de Poisson. On pense ici à des processus dont l'évolution dans le temps dépend de leur propre passé. On pourrait alors envisager de définir un processus dont la loi tienne compte des défaillances passées (plus précisément du temps de réparation ou du type de défaillance) et de leurs répercussions dans l'évolution future du processus. On pourrait également faire intervenir les données des programmes de maintenance.

Cela étant, nous pensons que les procédures développées dans le cadre de cette thèse pourront s'avérer utiles dans la pratique, et notamment pour les réactualisations des programmes d'Optimisation de la Maintenance par la Fiabilité (OMF), des réévaluations de sûreté et des programmes "durées de vie". En particulier l'estimation de la date de début de vieillissement d'un matériel, qui constituait notre objectif initial, devrait intéresser l'homme de l'art. Par ailleurs l'application de notre modélisation à l'analyse d'une table de mortalité invite à penser que notre modèle se révèlera utile dans d'autres domaines.

Bibliographie

[1] Aitkin(M). *Posterior Bayes Factors.* J.R. Statist. Soc. B 53, No. 1, p111-142, 1991.

[2] Akman(V.E) et Raftery(A.E). *Asymptotic inference for a change-point Poisson process.* The Annals of Statistics, vol. 14, No. 4, p 1583-1590, 1986.

[3] Ansell(J.I) et Phillips(M.J). *Practical Methods for Reliability Data Analysis.* Oxford statistical science series, 1994.

[4] Ascher(H) et Feingold(H). *Repairable Systems Reliability.* New York and Basel : Marcel Dekker, inc, 1984.

[5] Ascher(S). *A survey of tests for exponentiality.* Communications in Statistics-Theory and Methods, 19(5), p1811-1825, 1990.

[6] Atwood(C.L), Shah(V.N), Galyean(W.J). *Analysis of pressurized water reactor primary coolant leak events caused by thermal fatigue.* ESREL 99, p581-586, 1999.

[7] Bacha(M). *Inférence statistique pour des modèles de durées de vie et applications.* Thèse, 1996.

[8] Bacha(M), Celeux(G), Idée(E), Lannoy(A), Vasseur(D). *Estimation de modèles de durées de vie fortement censurées.* Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, Éditions Eyrolles, 1998.

[9] Bain(L) et Engelhardt(M). *Statistical analysis of reliability and life testing models.* Marcel Dekker, 1991.

[10] Bon(J.L). *Fiabilité des systèmes, Méthodes mathématiques.* Masson, 1995.

[11] Norme CEI 605-6 *Essais de fiabilité des équipe ments. Partie 6 : Tests de validité des hypothèses du taux de défaillance constant ou de l'intensité de défaillance constante.* 25/10/96.

[12] Norme CEI 1649 *Procédures pour le test d'adéquation, les intervalles de confiance et limites inférieures de confiance pour données suivant une loi de Weibull.* 28/02/97.

[13] Clarotti(C.A), Lannoy(A), Procaccia(H). *Un modèle de vieillissement bayésien simplifié.*

[14] Clarotti(C.A), Procaccia(H). *Un modèle bayésien de croissance de fiabilité.* 11ème colloque National de Fiabilité et Maintenabilité, 1998.

[15] D'Agostino(R.B) et Stephens(M.A). *Goodness-of-fit techniques.* New York and Basel : Marcel Dekker, inc, 1986, Statistics, textbooks and monographs, volume 68.

[16] Dempster(A.P). *The direct use of Likelihood for significance testing.* Proc. Conf. found. Quest. stat. Inference, Aarhus 1973, p 335-357, 1974.

[17] Dempster(A.P), Laird(N), Rubin(D). *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm.* J. Roy. Statist. Soc. (Ser. B), vol. 39, p 1-38, 1977.

[18] Droesbeke(J.J), Fichet(B), Tassi(P), éditeurs. *Analyse statistique des durées de vie.* Economica, 1989.

[19] Dumonceaux(R), Antle(C.E), Haas(G). *Likelihood Ratio Test for Discrimination Between Two Models with Unknown Location and Scale Parameters.* Technometrics, Vol. 15, No. 1, 1973.

[20] Farnum(N.R), Booth(P). *Uniqueness of Maximum Likelihood Estimators of the 2-Parameter Weibull Distribution.* IEEE Transactions on reliability, vol.46, No.4, 1997 December.

[21] Friedman(L) et Gertsbakh(I). *Maximum Likelihood Estimation in a minimum-type Model with Exponential and Weibull Failure Modes.* J.A.S.A, vol. 75, p460-465, 1980.

[22] Gaudoin(O). *Outils statistiques pour l'évaluation de la fiabilité des logiciels.* Thèse, 1990.

[23] Gnedenko(B.V), Belyayev(Y.K) et Solovyev(A.D). *Mathematical Methods of Reliability Theory.* Academic Press, New york, 1 969.

[24] Gourieroux(C) et Monfort(A). *Statistique et Modèles économétriques.* vol. 1 et 2. Economica, 1996.

[25] James Press(S). *Bayesian Statistics : Principles, Models, and Applications.* John Wiley, 1989.

[26] Johnson(N.L), Kotz(S), Balakrishnan(N). *Continuous Univariate Distributions. Volume 1.* New York : John Wiley Sons, 1994.

[27] Kalbfleisch(J.D) et Prentice(R.L). *The Statistical Analysis of Failure Time Data.* John Wiley, 1980.

[28] Kass(R.E). *Bayes factors in practice.* The Statistician 42, p551-560, 1993.

[29] Kass(R.E) Raftery(A). *Bayes factors.* Journal of the American Statistical Association, 90, p773-795, 1995.

[30] Kiefer(N.M). *Discrete parameter variation : efficient estimation of a switching regression model.* Econometrica, vol. 46, No.2 p 427-434, mars 1978.

[31] Klefsjö(B) et Westberg(U). *Efficiency calculations of some tests for exponentiality by using TTT-transforms.* Research Report, 1996 :9. Division of Quality Technology and Statistics, Lulea University, S-971 87 Lulea, Sweden, 1996.

[32] Kvaloy(J.T) et Lindqvist(B.H). *TTT-based tests for trend in repairable systems data. Reliability Engineering and System Safety 60, p13-28, 1998.*

[33] Lannoy(A). *Analyse quantitative et utilité du retour d'expérience pour la maintenance des matériels et la sécurité.* Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, Éditions Eyrolles, 1996.

[34] Lavine(M) and Schervish(M.J). *Bayes factors : What they are and what they are not.* The American Statistician, vol.53, No.2, May 1999.

[35] Lawless(J.F). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data.* John Wiley, 1982.

[36] Lee(P.M). *Bayesian Statistics : An introduction.* Oxford University Press, 1989.

[37] Lehmann(E.L) et Casella(G). *Theory of point estimation.* Springer, 1998.

[38] McLachlan(G.J) et Krishnan(T.). *The EM Algorithm and Extensions.* John Wiley, 1997.

[39] Martz(H) et Waller(R). *Bayesian Reliability Analysis.* John Wiley, 1982.

[40] Monfort(A). *Cours de probabilités*. Economica, 1996.

[41] Monfort(A). *Cours de statistique mathématique*. Economica, 1997.

[42] Morgan(B.J.T). *Elements of Simulation*. London : Chapman Hall, 1984.

[43] Nelson(W). *Applied Life Data Analysis* . New York : John Wiley Sons, 1982.

[44] O'Hagan(A). *Fractional Bayes Factors for Model Comparison*. J.R. Statist. Soc. B 57, No. 1, p99-138, 1995.

[45] Raftery(A.E) et Akman(V.E). *Bayesian analysis of a Poisson process with a change-point*. Biometrika, 73, 1, p 85-89, 1986.

[46] Ripley(B.D). *Stochastic Simulation*. New York : John Wiley Sons, 1987.

[47] Robert(C.P). *L'analyse statistique bayésienne*. Economica, 1992.

[48] Robert(C.P). *Faut-il accepter ou rejeter les p-values ?* Journal de la Société de Statistique de Paris, No.3, 1996.

[49] Saporta(G). *Probabilités analyse des données et statistique*. Éditions Technip, 1990.

[50] Shorack(G.R). *The best test of exponentiality against gamma alternatives*. J.A.S.A, 67, p213-214, 1972.

[51] Signoret(J.P). *La loi de Weibull aurait-elle une face cachée ?* Phoebus - la revue de la sûreté de fonctionnement, No. 5, 1998.

[52] Snyder(D.L). *Random Point Processes*. New York : John Wiley Sons, 1975.

[53] Spurrier(J.D). *An overview of tests for exponentiality*. Communications in Statistics-Theory and Methods, 13(13), p1635-1654, 1984.

[54] Zacks(S). *Estimating the Shift to Wear-out of Systems Having Exponential-Weibull Life Distributions.* Operations Research,vol. 32, No. 3, p741-749, 1984.