FONCTIONS À VARIATIONS RÉGULIÈRES, CONSISTANCE DE LA MÉTHODE E.T.

Stéphane Girard - Jean Diebolt

Université Montpellier II - IMAG/LMC/SMS

23 mars 2000

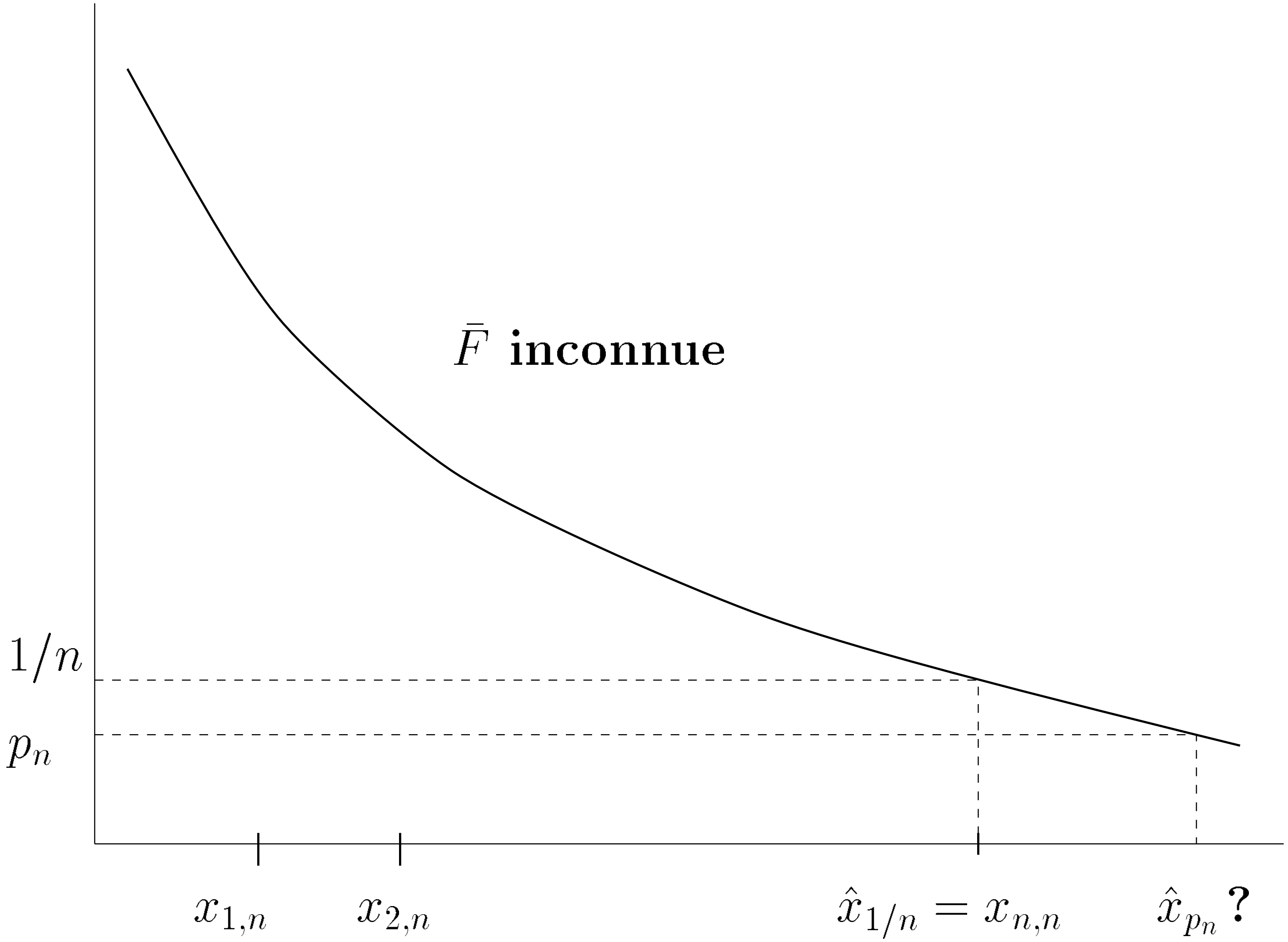
Plan

1. Estimation des quantiles extrêmes,
2. La méthode E.T. (Exponential Tail),
3. Consistance de l'estimateur E.T.,
4. Perspectives.

1. Estimation des quantiles extrêmes

- **Données**
  - $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n réalisations iid de X, X de fonction de répartition F. On définit $\bar{F} = 1 - F$.
- **Problème**
  - Estimer le quantile x_{p_n} défini par $\bar{F}(x_{p_n}) = p_n$ avec $p_n < 1/n$.
- **Difficultés** :
  - $\bar{F}$ inconnue,
  - Estimation au-delà de l'observation maximale ($p_n < 1/n$).

Estimation des quantiles extrêmes



2. La méthode E.T.

Résultat de Pickands, 1975 :

- On se donne un seuil u.
- Définition des excès : $Y = X - u$ sachant $X > u$.

$$\bar{F}_u(y) = \frac{\bar{F}(u+y)}{\bar{F}(u)}.$$

- Pickands : $\bar{F}_u(y) \to \bar{G}(y;\sigma,k)$ quand $u \to +\infty$, avec $\bar{G} = 1 - G$ et G fdr Pareto Généralisée :

$$\bar{G}(y;\sigma,k) = \begin{cases} \left(1 - \frac{ky}{\sigma}\right)^{1/k} & \text{si } k \neq 0 \text{ et } \sigma > 0 \\ \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) & \text{si } k = 0 \text{ et } \sigma > 0. \end{cases}$$

La méthode E.T.

Breiman, 1990 :

- Cas particulier où $k = 0$, (F appartient au DA(Gumbel)),
  "Queues exponentielles".
  Exemples : Lois Normale, Log-Normale, Weibull, Double-Exponentielle ...

- Approximation de $\bar{F}$:

$$\bar{F}(x) \simeq \bar{F}(u) \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma(u)}\right).$$

- Approximation de $\bar{F}^{-1}$:

$$\bar{F}^{-1}(x) \simeq \bar{F}^{-1}(y) - \sigma\left(\bar{F}^{-1}(y)\right) \ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

La méthode E.T.

Application à l'estimation des quantiles extrêmes : deux étapes

1. Etape d'approximation :

$$\tilde{x}_{p_n} = \tilde{x}_{q_n} - \sigma(\tilde{x}_{q_n}) \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right),$$

   avec $p_n < 1/n$ et $q_n > 1/n$, un paramètre de la méthode.

2. Etape d'estimation :

$$\hat{x}_{p_n} = \hat{x}_{q_n} - \hat{\sigma}_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right),$$

   $\hat{\sigma}_n$ estimateur de la moyenne d'une loi Exponentielle,
   $\hat{x}_{q_n}$ estimateur d'un quantile classique.

La méthode E.T.

Erreur relative sur le quantile

- Décomposition de l'erreur totale :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x_{q_n} - \hat{x}_{q_n}}{x_{q_n}} & = & \dfrac{x_{q_n} - \tilde{x}_{q_n}}{x_{q_n}} & + & \dfrac{\tilde{x}_{q_n} - \hat{x}_{q_n}}{x_{q_n}}, \\ \varepsilon_n & = & \varepsilon_{app_n} & + & \varepsilon_{est_n}. \end{array}$$

- ε_{app_n} erreur d'approximation : dûe uniquement à l'approx. de Pickands.
- ε_{est_n} erreur d'estimation : dûe uniquement à l'estimation de x_{q_n} et $\sigma(x_{q_n})$.
- Etude de la "consistance" : donner des conditions sur p_n et q_n pour que $\varepsilon_{app_n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Consistance de la méthode E.T.

Notations :

- On écrit

$$\bar{F} = \exp(-H) \Leftrightarrow H = \ln(1/\bar{F}).$$

- On note

$$K(x) = \frac{x(H^{-1})'(x)}{H^{-1}(x)}.$$

Hypothèses :

- On suppose que $K \in SR_\alpha$ avec $0 \leq \alpha < 1$.
- On suppose que $K(x)$ a une limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ quand $x \to \infty$.

3. Consistance de la méthode E.T.

Exemples

- Loi de Weibull $W(\beta)$: $H(x) = x^\beta$,
  donc $K(x) = 1/\beta$, $\alpha = 0$ et $\ell = 1/\beta$.
- Loi Normale $N(0,1)$: $H(x) = x^2/2 + \ln x + \ldots$,
  donc $K(x) \sim 1/2$, $\alpha = 0$ et $\ell = 1/2$.
- Loi Log-Normale $LN(0,1)$: $H(x) = (\ln x)^2/2 + \ln\ln x + \ldots$,
  donc $K(x) = \sqrt{x/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\ell = +\infty$.
- Loi Double-Exponentielle : $H(x) = \exp x$,
  donc $K(x) = 1/\ln x$, $\alpha = 0$ et $\ell = 0$.

Consistance de la méthode E.T.

Résultat :

1. Si $\ell = 0$ alors $\varepsilon_{app_n} \to 0$ sans restriction sur p_n et q_n.
2. Si $0 < \ell < +\infty$ alors on a deux cas :
   - Soit $\ell \neq 1$ et alors $\varepsilon_{app_n} \to 0 \Leftrightarrow \ln p_n \sim \ln q_n \sim \ln(1/n)$.
   - Soit $\ell = 1$ et alors $\varepsilon_{app_n} \to 0$ sans restriction sur p_n et q_n.
3. Si $\ell = +\infty$ alors $\varepsilon_{app_n} \to 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln p_n}{\ln q_n} - 1 = o\left(\dfrac{1}{K(\ln n)}\right)$.

Consistance de la méthode E.T.

Interprétation : On a une division du DA(Gumbel) en trois classes.

- $\ell = 0$ ou 1 : Décroissance "très rapide" de la queue (ex : Double-Exp) ou loi très proche de la loi Exponentielle (ex : Exponentielle).

  $\leadsto$ *Estim. consist. de tous les quantiles extrêmes.*

- $0 < \ell < +\infty$: Décroissance "assez rapide" de la queue (ex : Normale, Weibull ($\beta \neq 1$) ...)

  $\leadsto$ *Estim. consist. des quantiles extrêmes tels que* $\ln p_n \sim \ln(1/n)$.

- $\ell = +\infty$: Décroissance "assez lente" de la queue (ex : Log-Normale)

  $\leadsto$ *Estim. consist. des quantiles extrêmes tels que* $\ln p_n \sim \ln(1/n)$ *avec en plus une condition sur* $\frac{\ln p_n}{\ln(1/n)} - 1$.

Consistance de la méthode E.T.

Vitesse : lorsque $\ln p_n \sim \ln q_n \sim \ln(1/n)$,

1. Si $\ell = 0$ alors
$$\varepsilon_{app_n} \sim -\frac{1}{2}\frac{K(\ln n)}{\ln^2 n}\ln^2(p_n/q_n).$$
2. Si $0 < \ell < +\infty$ et $\ell \neq 1$ alors
$$\varepsilon_{app_n} \sim \frac{\ell(\ell-1)}{2}\frac{1}{\ln^2 n}\ln^2(p_n/q_n).$$
3. Si $\ell = +\infty$ alors
$$\varepsilon_{app_n} \sim \frac{1}{2}\frac{K^2(\ln n)}{\ln^2 n}\ln^2(p_n/q_n).$$

Consistance de la méthode E.T.

Remarques :

- On retrouve la même hiérarchie entre les classes.
- Dans le cas $\ell < 1$ (y compris $\ell = 0$) on a toujours $\varepsilon_{app_n} < 0$ (biais positif).
- Dans le cas $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$) on a toujours $\varepsilon_{app_n} > 0$ (biais négatif).
- Plus on choisit p_n proche de q_n (donc de $1/n$) plus la vitesse est grande, et inversement.

	$p_n = \frac{1}{n \ln^a(n)},\ q_n = \frac{1}{n \ln^b(n)}$ $(b < 0 < a)$	$p_n = \frac{1}{n(1+n^{-k})},\ q_n = \frac{1}{n(1-n^{-k})}$ $(k > 0)$
Double-Exp	$-\frac{1}{2}(a-b)^2 \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^2}$	$-\frac{2}{(\ln n)^2 (\ln \ln n)} \frac{1}{n^{2k}}$
Weibull	$\frac{1-\beta}{2\beta^2}(a-b)^2 \frac{(\ln \ln n)^2}{(\ln n)^2}$	$\frac{1-\beta}{\beta^2} \frac{2}{(\ln n)^2} \frac{1}{n^{2k}}$
Normale	$-\frac{1}{8}(a-b)^2 \frac{(\ln \ln n)^2}{(\ln n)^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{1}{(\ln n)^2} \frac{1}{n^{2k}}$
Log-Normale	$\frac{1}{4}(a-b)^2 \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$	$\frac{1}{(\ln n)} \frac{1}{n^{2k}}$

5. Perspectives

Erreur d'approximation

- Etude des autres domaines d'attraction.

Erreur d'estimation

- Donner des conditions sur p_n et q_n pour obtenir des lois limites normales sur $\hat{x}_{q_n}$ et $\hat{\sigma}_n$.

Application : Intervalles de confiance, tests, ...