



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Granularité dans les représentations spatio-temporelles

Jérôme Euzenat

N° 2242

Avril 1994

----- PROGRAMME 3 -----

Intelligence artificielle,
systèmes cognitifs et
interaction homme-machine

R *apport*
de recherche

1994



Granularité dans les représentations spatio-temporelles

Jérôme Euzenat*

Programme 3 — projet Sherpa

Rapport de recherche n° 2242 — Avril 1994 — 62 pages

RÉSUMÉ: Afin de représenter le temps sous plusieurs niveaux de détail, une représentation temporelle granulaire est proposée. Une telle représentation dispose les entités temporelles dans différents espaces organisés hiérarchiquement et nommés *granularités*. Elle conduit à conserver la représentation symbolique du temps et à simplifier la représentation numérique. Par contre, elle nécessite la définition d'opérateurs de conversion des représentations entre deux granularités afin de pouvoir utiliser une même entité temporelle sous différentes granularités.

Les propriétés que doivent respecter ces opérateurs afin de conserver les interprétations classiques de ces représentations sont exposées et des opérateurs de conversion symboliques et numériques sont proposés. Sous l'aspect symbolique, les opérateurs sont compatibles avec la représentation des relations temporelles sous forme d'algèbre de points et d'intervalles. En ce qui concerne la conversion numérique, certaines contraintes doivent être ajoutées afin de disposer des propriétés escomptées. Enfin, des possibilités d'utilisation de la latitude laissée par la définition des opérateurs sont discutées et l'extension de la représentation granulaire à d'autres espaces est explorée.

MOTS-CLÉS: Représentation temporelle — Représentation spatiale — Points de vue — Granularité — Localité — Histoire.

Version du Vendredi 22 Avril 1994

Ce rapport est une version étendue de [Euzenat 93]; il contient en particulier une annexe des programmes permettant d'établir les propriétés des opérateurs proposés, une discussion plus longue des motivations, la discussion de l'extension du travail à l'espace et la partie manquante de la version publiée.

* Jerome.Euzenat@imag.fr

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes
IMAG-LIFIA, 46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Téléphone: +33 76 57 47 77 — Télécopie: +33 76 57 47 54

Établissement public national à caractère scientifique et technologique - Décret N°85.831 du 2 août 1985

Granularity in representation of time and space

Jérôme Euzenat

ABSTRACT: Temporal granularity is introduced in order to consider time under several temporal levels. Such a temporal representation lets the usual symbolic time axiomatisation unaltered and simplifies numerical representation. However, it requires conversion operators in order to share a same temporal entity between several granularities.

After a discussion about properties that conversion operators must satisfy in order to preserve the interpretation of the representations, symbolic and numeric conversion operators are presented. At a symbolic level, they are compatible with the algebraic temporal relations. Concerning numeric conversion, some constraints must be added in order to satisfy the expected properties. Moreover, numeric operators allow to take into account domain-dependent knowledge in their design. Some proposals for such operators are discussed and the extension of granularity towards other kind of spaces is investigated.

KEY WORDS: Time representation — Space representation — Standpoints — Granularity — Locality — Story.

Granularité dans les représentations spatio-temporelles

Jérôme Euzenat

1. Des points de vue à la granularité

La description de connaissance couvrant des domaines divers et étendus conduit à la complexification difficilement appréhendable de la base de connaissance. C'est de cette préoccupation que naît la notion de *point de vue* en représentation de connaissance. Le point de vue est un sous-ensemble d'une base de connaissance pertinent suivant un critère particulier. Cela peut être la vision qu'un spécialiste d'une certaine discipline a d'un problème ou l'ensemble de la connaissance accessible dans une certaine situation. Il permet de structurer une base de connaissance globale de façon à ce qu'un point de vue n'accède qu'à la partie de la base pertinente pour celui-ci. Le point de vue permet donc de réduire la difficulté d'un raisonnement à produire sur un problème local (à un certain domaine ou à un certain espace) en se concentrant sur les données utiles. Un nombre croissant de systèmes font varier la présentation des données selon un «point de vue» (voir [MAR 93] pour une bibliographie complète).

Structurer hiérarchiquement un domaine est une démarche naturelle pour considérer la même réalité sous plusieurs niveaux de détail — ordonnés ou non — ou *granularités*. Une telle hiérarchisation, en concentrant la manipulation des entités sur le niveau adéquat, permet souvent un gain de performance. Deux exemples naturels sont le temps et l'espace parce qu'un ordre fondé sur la discrétisation d'un espace métrique peut servir de support à la granularité. Ainsi, dans le cas d'un attentat contre un chef d'état les événements sont exprimables à divers niveaux:

- Pour les protagonistes, une bombe doit éclater lorsque la cible est dans la pièce où se trouve la bombe et après que l'agresseur en soit sorti.
- Pour ses contemporains, la cible doit être tuée avant qu'elle ne quitte la ville.
- Pour l'historien de l'époque contemporaine, par contre, il importe que la cible soit tuée durant l'année 17.
- Enfin, à l'échelle de l'histoire de l'humanité, il est probable que cet incident ne sera pas visible.

En conséquence, la vision des choses est différente suivant le point de vue adopté. Ceci s'applique en particulier au temps et va affecter la granularité avec laquelle celui-ci doit être représenté: pour le protagoniste, le contemporain, l'historien de l'époque contemporaine et celui de l'humanité respectivement la granularité est d'une minute, d'une semaine, d'une année ou

d'un siècle. Cette granularité peut être aussi spatiale: pour le protagoniste, elle est limitée à une pièce, pour le contemporain à une ville...

Au delà des espaces euclidiens, la structure peut être plus intimement liée à un domaine concret. Elle peut être mise en évidence, par exemple, lors de la compréhension de récit: le texte «Avant d'aller au marché, je suis allée chercher le courrier. Au moment où j'ouvrais la boîte à lettres, le facteur arrivait» n'est compréhensible qu'en sachant décomposer à un niveau de détail particulier l'action d'«aller chercher le courrier». En effet, l'action «j'ouvrais la boîte à lettres» n'est pas référencée explicitement dans une autre partie du texte. Ainsi, positionner le moment où «le facteur arrive» dans cette histoire requiert un surplus de connaissance: savoir qu'«aller chercher le courrier» nécessite d'«ouvrir la boîte à lettres».

Il convient de noter que, si la granularité a été introduite au travers des points de vue (avec lesquels elle répond au besoin d'opérer une sélection sur la connaissance accessible), ces deux notions ne sont pas forcément liées. En particulier, il est possible d'imaginer un spécialiste manipulant des entités de granularités différentes et plusieurs spécialistes partageant des entités de même granularité. La granularité provient de la hiérarchisation de points de vue fondée sur la résolution des entités qui y sont représentées.

Les points de vue ont cependant une autre justification, plus méthodologique: celle de représenter la connaissance de différents «spécialistes» et manipuler la connaissance disponible à différentes échelles; c'est le cas des modèles de «tableaux noirs». Cela permet, d'une part d'exprimer indépendamment la connaissance de ces spécialistes, et, d'autre part, de les faire collaborer en échangeant la connaissance entre les points de vue. Si la granularité a, pour l'instant, été envisagée de manière isolée, il est clair qu'étant née d'une hiérarchisation de différentes représentations, elle a un rôle à jouer dans la communication entre spécialistes.

Il est donc nécessaire de communiquer la connaissance d'un niveau de représentation vers un autre, et, par conséquent, de disposer de règles de conversion des représentations granulaires d'une granularité vers une autre (et ainsi, d'un point de vue vers un autre) les deux ayant la même interprétation. Cependant, la définition de tels opérateurs se révèle problématique: comment ordonner les performances obtenues au 100m messieurs par Hary (1960, 10"2), Borzov (1972, 10"14) et Wells (1976, 10"25) aux jeux olympiques sachant que la première est chronométrée avec une précision de $1/10^{\circ}$ et les deux suivantes de $1/100^{\circ}$ de seconde? Il n'existe pas de réponse dans l'absolu: la différence de précision est telle qu'elle empêche de conclure. Cependant, il est clair que la performance de Hary est meilleure que celle de Burke (1896, 12" à la seconde). Il y a donc des règles minimales qui doivent être respectées par des opérateurs de conversion. Ces règles permettront la communication, et donc l'exploitation, de données acquises sous une certaine granularité vers une autre granularité.

La granularité a déjà été envisagée de manière générale par Jerry Hobbs [HOB 85] qui distingue une granularité a posteriori (où le niveau de détail est déterminé en fonction des entités que l'on veut y voir) d'une granularité a priori (déterminée indépendamment de ce qui doit être représenté). Il faut déjà noter de cette dichotomie que la granularité n'est pas propre au phénomène observé, mais à l'observation (et l'utilisation) qui en est faite: la performance d'un coureur de sprint n'est pas intrinsèquement un temps à la seconde ou au $1/100^{\circ}$ de seconde. Une granularité a priori va définir, avant toute utilisation, une fonction de congruence entre des expressions représentant le même domaine. La granularité temporelle est définie a priori (les années, par exemples, sont fixées sans tenir compte de ce qui s'y passe). Quand il s'agit de mesures numériques, cette granularité peut se traduire par une conversion régulière des unités ou échelle.

Le présent travail se concentre sur deux hiérarchies connues de tous: la hiérarchie existant entre des ordres de grandeur temporels (les millénaires, années, heures, secondes et bien d'autres) et une hiérarchie spatiale. L'objectif est de poser les bases pour une représentation granulaire du temps et de l'espace offrant la possibilité de représenter des entités à l'aide d'expressions sous différentes granularités et celle de convertir ces entités d'une granularité en une autre. Une large place est dédiée au temps pour lequel un système complet de représentation a été défini. La représentation spatiale n'est prise en compte que comme une extension de la première.

Indépendamment du travail présenté ici, divers auteurs se sont proposés d'examiner la granularité a priori [GAY 91, MON 92]. Les points de contact entre ces divers travaux seront évoqués au fur et à mesure de l'exposé; la section 8 détaillera les principaux points de divergence.

Le problème principal examiné ci-après est donc la représentation des entités temporelles sous plusieurs granularités, la conversion de ces entités d'une granularité vers une autre et la cohérence entre les représentations d'une même entité sous différentes granularités. Le premier point est abordé en utilisant les mêmes expressions que les représentations non granulaires. Le second en définissant des opérateurs de conversion de représentations d'une granularité vers une autre, que ce soit pour les représentations symboliques ou numériques. Enfin, le troisième point est traité par le respect d'un certain nombre de propriétés par les opérateurs de conversion. Ces propriétés garantissent que, dans une certaine mesure, les interprétations (principalement les rapports entre symbolique-numérique et instant-intervalles) des représentations sont conservées.

Les approches symboliques de représentation du temps sont d'abord rappelées (§2). Elles permettent de représenter des entités temporelles sans tenir compte du niveau de détail, mais s'interprètent convenablement par rapport à notre intuition du temps. Elles sont donc le candidat

approprié pour représenter les entités temporelles sous chacune des granularités. Le lecteur au fait de ces représentations peut directement commencer à la section suivante qui propose une intégration de la granularité avec les approches classiques (§3). Les modifications nécessaires pour représenter le temps sur chacune des granularités y sont présentées avant d'aborder la question importante de savoir s'il est possible de maintenir la cohérence entre chacune des granularités. Des propriétés souhaitables sont alors proposées pour des règles de conversion des représentations temporelles granulaires d'une granularité vers une autre. Ces règles permettront la communication, et donc l'exploitation, de données acquises sous une certaine granularité vers une autre granularité. De tels mécanismes sont proposés aux §4 et 5. Il y sera montré qu'il est possible de représenter symboliquement le temps sous diverses granularités et de convertir les représentations d'une granularité vers une autre sans introduire de contradictions. Si, par contre, la représentation d'un évènement à un niveau de détail non adéquat introduit inévitablement une perte d'information, les résultats obtenus sur les opérateurs de conversion permettent de la minimiser.

Avant de conclure, deux extensions du travail présenté sont esquissées. Des méthodes pour intégrer la résolution de contraintes temporelles au sein d'une représentation du temps granulaire seront présentées (§6). Elles utilisent la connaissance du domaine pour combler partiellement le vide laissé par la représentation granulaire lors de la conversion des contraintes. Enfin, l'utilisation de la granularité pour la représentation de l'espace est envisagée (§7)

2. Représentation du temps

L'introduction de la granularité ne remplace pas les différentes représentations du temps qui ont été proposées en intelligence artificielle. Au contraire, elle en tire parti: la granularité est une façon de voir une entité temporelle particulière. Les approches classiques de représentation du temps sont donc brièvement abordées ici afin de les considérer ensuite dans la perspective d'une représentation du temps granulaire.

La prise en compte du temps peut se faire en définissant des représentations temporelles ou en tenant compte des relations temporelles entre évènements sans chercher à représenter leur moment d'occurrence. Le premier cas concerne les représentations du temps mesurable, le second celui des logiques temporelles incluant des modalités temporelles telles que «Past» et «Future».

Cependant, la sémantique des logiques temporelles ou dynamiques conduit à représenter le temps dans un modèle. Elles définissent donc leur propre représentation du temps. Tant que cette représentation du temps est définie implicitement (ou a posteriori) à partir des expressions syntaxiques, elle n'a pas à être explicitée. Cependant, l'implémentation de telles logiques fait de plus en plus usage de la réification de la sémantique [SHO 86], ce qui conduit à introduire,

dans la syntaxe, la représentation du temps qui est définie dans la sémantique. La représentation explicite du temps est donc essentielle pour sa prise en compte par les représentations de connaissance.

Il est clair que la granularité n'a de sens que lorsque le temps est explicitement représenté et qu'elle prend tout son sens lorsque celui-ci est mesurable. Seule cette représentation explicite du temps sera étudiée ici. Tout d'abord, le modèle classique du temps mesurable (représentation numérique) sera brièvement évoqué (§2.1) avant de passer aux représentations symboliques principales (§2.2) et aux rapports qu'elles entretiennent (§2.3).

De nombreux aspects de la représentation temporelle n'ont pas été pris en compte ici. S'ils sont importants, ils ne subissent en général pas l'influence de la granularité. Ils peuvent être classés en deux catégories:

- Les aspects liés aux mécanismes de raisonnement: temps arborescent ou linéaire [MCD 81, SHO 86, DEA 87, BES 89], rapports avec les représentations non temporelles [MCC 69], nature des évènements (liquide, solide, périodique...) [MCC 69, MCD 81, ALL 83], causalité et chronologie [MCD 81, SHO 86], persistance et problèmes de raisonnement non monotone [MCD 81, SHO 86].
- Ceux liés à des caractéristiques du temps physique et à sa dynamique: irréversibilité, situation du temps du système dans la représentation (l'instant présent) [ALL 83, DEA 89], problèmes de format [HAJ 89, DEA 87], temps mesurable/non mesurable.

2.1. Représentation numérique du temps

Un modèle classique du temps est l'ensemble des réels \mathbb{R} . Le temps peut donc être représenté par une droite dont les instants sont les points et les intervalles des segments. Cette représentation numérique a l'intérêt d'être un modèle des représentations symboliques présentées ci-dessous. Il est donc important de conserver la cohérence entre ce modèle et les résultats symboliques. Le but de tous les résultats présentés par la suite est le respect de cette cohérence.

L'inférence temporelle dans un tel cadre est réduite à la résolution d'équations de variables réelles ou à un calcul sur les réels permettant de déterminer la position des points séparés par une certaine distance.

D'autres travaux utilisent un modèle plus complexe permettant de représenter l'incomplétude de la connaissance par plusieurs droites ou des collections de demi-droites à partir de certains points. Ce dernier cas est celui des logiques modales temporelles [BES 89] et du travail de Drew Mac Dermott [MCD 81]. La structure de droite temporelle s'y retrouve cependant pour traiter les chroniques, séries d'évènements en relation linéaire. Ici, la considération de plusieurs branches temporelles distinctes ne sera pas abordée.

2.2. Représentation symbolique du temps

Deux types d'expressions temporelles sont généralement considérés dans les représentations symboliques: l'expression temporelle qui dure (intervalle) et celle qui ne dure pas (instant). Ces approches sont présentées ci-dessous. Elles peuvent se classer en deux ensembles, suivant qu'elles considèrent l'instant (§2.2.1) ou l'intervalle (§2.2.2) comme objet primitif. Considérer la granularité permet de réduire ces deux notions l'une à l'autre. Les tentatives d'unification des deux approches seront donc étudiées ensuite (§2.3).

2.2.1. Les instants

L'*instant* est l'entité temporelle sans durée (ou ponctuelle par analogie avec un point sur une droite). Un instant peut être représenté numériquement par une date. Représenter les instants de manière symbolique consiste à les identifier et à les mettre en relation. Il existe trois relations primitives et exclusives deux à deux entre instants qui sont: «avant» (<), «après» (>) et «au même instant» (=). L'ensemble {<, =, >} est nommé A_3 .

relation (r): $x1 \ r \ x2$	$x1/x2$	réciproque: $x2 \ r^{-1} \ x1$
avant (<)		après (>)
égale (=)		=

Table 1. Les trois relations entre deux instants $x1$ et $x2$.

Il est possible de déduire la relation entre deux instants x et z qui n'a pas été explicitement communiquée en propageant les relations déjà connues par ailleurs. Ainsi, si x est simultané ($\{=\}$) à l'instant y et que celui-ci est antérieur ($\{<\}$) à l'instant z , il est possible d'en déduire la relation $x\{<\}z$. Ceci est nommé *composition* des relations temporelles. L'opérateur \times_3 de composition de relations est représenté par une table de transitivité (table 2). Elle indique bien que $=\times_3<$ donne $\{<\}$.

\times_3	>	=	<
>	>	>	<=>
=	>	=	<
<	<=>	<	<

Table 2. Table de transitivité des relations symboliques entre instants.

Marc Vilain et Henry Kautz ont proposé un algorithme de propagation de contraintes temporelles en $O(n^4)$ [VIL 86, VAN 89] pour A_3 (ou pour l'ensemble des contraintes exprimables — voir §2.2.3 — à partir de A_3).

2.2.2. Les intervalles

L'*intervalle* est l'entité temporelle qui dure. Par analogie à la droite, il peut être assimilé à un segment. C'est ainsi que l'intervalle sera représenté de manière numérique, soit par une date de début et une date de fin, soit par une date de début et une durée. Les travaux de James Allen [ALL 83] considèrent les intervalles comme entités uniques d'une représentation temporelle symbolique. Ces intervalles peuvent être manipulés via un ensemble de relations temporelles entre eux. Il existe 13 relations possibles et mutuellement exclusives entre deux intervalles (voir table 3); leur ensemble est nommé A_{13} . Elles permettent, en particulier, de décomposer graduellement un intervalle en considérant les relations que celui-ci entretient avec ses sous-intervalles.

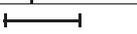
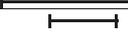
relation (r): $x1 \text{ r } x2$	$x1/x2$	réciproque: $x2 \text{ r}^{-1} x1$
avant (b)		après
pendant (d)		englobe
commence avant (o) (et termine avant)		finit après (et commence après)
commence (s) (et termine avant)		est commencé par (et termine après)
termine (f) (et commence après)		est terminé par (et commence avant)
termine au début (m)		commence à la fin
égale (e)		e

Table 3. Les 13 relations entre deux intervalles $x1$ et $x2$.

L'opérateur \times_{13} de composition de relations est représenté par une table de transitivité [ALL 83], similaire à la table 2, qui permet de déduire d'un ensemble d'intervalles et de contraintes entre intervalles, les relations possibles entre deux intervalles quelconques.

James Allen et d'autres ont proposé diverses stratégies de propagation de contraintes temporelles. Un algorithme de propagation en $O(n^3)$ a été proposé qui ne garantit que la 3-consistance (consistance des relations entre tout groupe de trois intervalles) [ALL 83]. Cet algorithme est cependant complet pour un sous-ensemble des relations de Allen dites relations convexes.

2.2.3. Extension à l'information incomplète

Soit Γ représentant A_{13} ou A_3 , \vee la disjonction et \times l'opérateur de composition de l'ensemble de relations concerné, les notations ci-dessous seront utilisées (voir [GHA 89] pour un exposé algébrique unifié des deux relations ainsi que les propriétés des structures fondées sur 2^Γ : d'une manière générale, $\langle 2^\Gamma \subseteq \times \rangle$ est une algèbre de relations binaires [BAR 70]). L'incertitude quant à la position d'une entité temporelle x par rapport à une autre entité temporelle y de même nature sera exprimée par un sous ensemble \wp de Γ s'interprétant comme la disjonction des relations de \wp :

$$x \rho y = \bigvee_{r \in \rho} x r y$$

Ainsi, $x \{b m\} y$ signifie que l'évènement x est antérieur ou termine au début de l'évènement y .

Par abus de langage, les conventions suivantes sont utilisées dans la suite:

- Quand les résultats seront valides pour les deux algèbres, aucune distinction ne sera faite entre les entités temporelles manipulées. Les ensembles supports (A_{13}, A_3) , de même que l'opération de transitivité \times , ne seront plus distingués;
- La lettre grecque ρ représentera un sous-ensemble de l'ensemble support correspondant ($\rho \subseteq \Gamma$); la lettre « r » en sera un élément (une relation).
- ρ^{-1} représentera l'ensemble des relations réciproques des éléments de ρ : $\{r^{-1}; r \in \rho\}$.
- $\rho_1 \times \rho_2$ représente la distribution de \times sur ρ :

$$\rho_1 \times \rho_2 = \bigcup_{r_1 \in \rho_1, r_2 \in \rho_2} r_1 \times r_2$$

2.3. Unification des instants et intervalles

Devant l'importance des deux types de représentation, il existe de nombreuses tentatives d'unification des approches ou d'expression de l'une dans l'autre. Elles sont présentées ici car les sections suivantes montreront que ces unifications possibles sont conservées par la définition de la représentation granulaire.

Drew Mac Dermott a défini des intervalles exprimés en fonction des instants afin de rendre compte des évènements solides (qui sont vrais sur un intervalle, mais sur aucune sous-partie de cet intervalle) [MCD 81]. Pour cela chaque intervalle est caractérisé par son instant de début et son instant de fin. Un tel intervalle x peut donc s'exprimer par $\langle x^- x^+ \rangle$ avec $x^- \{< =\} x^+$. Un problème reste à résoudre, celui de l'appartenance des extrémités des intervalles à celui-ci. L'avantage de la représentation de Mac Dermott est qu'elle permet d'exprimer tous les types d'intervalles ($[x^- x^+]$, $[x^- x^+[$, $]x^- x^+]$, $]x^- x^+[$): il suffit d'ajouter les axiomes correspondants. Cependant, le nombre d'axiomes alors nécessaires pour exprimer l'ensemble des relations de James Allen devient très important. Pour cela, James Allen propose d'utiliser une convention arbitraire: un intervalle $\langle x^- x^+ \rangle$ représente un intervalle fermé au début et ouvert à la fin: $[x^- x^+[$. Cette convention sera utilisée dans la suite, cependant les résultats restent valides si la convention inverse ($]x^- x^+]$) est utilisée.

Les relations entre intervalles peuvent alors être exprimées en fonction de celles sur les instants (voir table 4). N'importe quelle relation entre deux intervalles $x = \langle x^- x^+ \rangle$ et $y = \langle y^- y^+ \rangle$ peut être ainsi représentée par un quadruplé (r_1, r_2, r_3, r_4) de relations entre leurs extrémités correspondant à l'expression:

$$\langle x^- x^+ \rangle (r_1, r_2, r_3, r_4) \langle y^- y^+ \rangle \equiv x^- r_1 y^- \wedge x^- r_2 y^+ \wedge x^+ r_3 y^- \wedge x^+ r_4 y^+$$

sachant que, par ailleurs, $x^- \langle x^+ \rangle$ et $y^- \langle y^+ \rangle$, toutes les relations possibles entre ces quatre instants sont exprimables dans ce quadruplé (voir table 4). Afin d'exprimer les transformations symboliques des intervalles vers les instants, le symbole \Rightarrow sera utilisé. Ainsi, $\Rightarrow x$ représentera un intervalle converti en un couple d'extrémités et $\Rightarrow r$ une relation entre intervalles convertie en un quadruplé de relations entre extrémités. \Rightarrow est étendu aux ensembles de relations et l'image $\Rightarrow \rho$ d'un ensemble de relations entre intervalles ρ (représentant une disjonction de formules atomiques) est un ensemble de quadruplés (représentant une disjonction de conjonctions de formules atomiques entre instants). Ainsi:

$$\langle x^- x^+ \rangle \left[\bigcup_{i=1}^n \{(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})\} \right] \langle y^- y^+ \rangle \equiv \bigvee_{i=1}^n x^- r_{i1} y^- \wedge x^- r_{i2} y^+ \wedge x^+ r_{i3} y^- \wedge x^+ r_{i4} y^+$$

ce qui représente une forme normale pour ces relations. Comme toute formule représentant des relations entre quatre instants x^- , x^+ , y^- et y^+ respectant les propriétés des intervalles ($x^- \langle x^+ \rangle$ et $y^- \langle y^+ \rangle$) peut être mise sous cette forme, il est possible de définir l'opérateur inverse \Leftarrow qui convertit un couple d'instants en un intervalle et un ensemble de quadruplés représentant cette formule en un ensemble de relations entre intervalles (il faut que les couples d'instants permettent de former des intervalles). Bien entendu, les deux opérations (\Leftarrow et \Rightarrow) sont inverses l'une de l'autre.

xy	$x^- r_1 y^-$	$x^- r_2 y^+$	$x^+ r_3 y^-$	$x^+ r_4 y^+$	$xr^{-1}y$	$x^- r_1 y^-$	$x^- r_2 y^+$	$x^+ r_3 y^-$	$x^+ r_4 y^+$
b	<	<	<	<	b ⁻¹	>	>	>	>
d	>	<	>	<	d ⁻¹	<	<	>	>
o	<	<	>	<	o ⁻¹	>	<	>	>
s	=	<	>	<	s ⁻¹	=	<	>	>
f	>	<	>	=	f ⁻¹	<	<	>	=
m	<	<	=	<	m ⁻¹	>	=	>	>
e	=	<	>	=	e	=	<	>	=

Table 4. Les 13 relations entre intervalles exprimées en fonction des extrémités des intervalles.

Il est aussi possible de définir des relations entre instants et intervalles liant étroitement les deux représentations. Trois relations exclusives sont alors obtenues (voir table 5).

Les relations représentées dans la table 5 ne sont pas les cinq relations qui seraient obtenues avec la méthode utilisée pour obtenir la table 3 (avant, commence, pendant, termine et après). En effet, ce tableau est plus adapté au choix de considérer les intervalles comme fermés au

début et ouverts à la fin: le statut de «commence» n'est plus comparable à celui de «termine». Cependant, les deux options ont exactement les mêmes propriétés vis-à-vis de la granularité.

relation (r)	$x \text{ r } y$
avant (<)	$x \{<\} y^-$
pendant (\equiv)	$y^- \{<=\} x \{<\} y^+$
après (>)	$y^+ \{<=\} x$

Table 5. Les relations entre instants et intervalles exprimées en fonction des relations entre instants.

James Allen a essayé de montrer que les intervalles peuvent représenter des instants. Il signale que, pour cela, il est possible de reprendre la représentation des intervalles en fonction des instants et de considérer qu'un instant est un intervalle arbitrairement petit (un intervalle de taille nulle posant d'importants problèmes d'interprétation). Cette notion est encore rendue plus précise (dans le cadre d'un temps mesurable) en considérant qu'un instant est un intervalle dont la durée est inférieure à une mesure ε . Cependant, ce type d'intervalle est inexprimable dans le seul système des intervalles.

Le temps peut donc être représenté sous forme numérique et symbolique à l'aide de différents systèmes. La cohérence de ceux-ci est garantie au sens où il est possible d'interpréter ces systèmes les uns en fonction des autres (table 4 et interprétation des expressions comme des points ou segments temporels). Ces interprétations sont, sinon complètes (un ensemble de relations accepte plus d'un modèle en général alors qu'il est souvent censé représenter une seule réalité), du moins non contradictoires (ce qui se dérive d'un ensemble de relation est compatible avec tous ses modèles).

Ces représentations vont être utilisées comme représentations du temps sur une granularité. Le travail présenté ici s'efforcera de garantir que les modèles de la réalité à représenter sont conservés sous toutes les granularités.

3. Représentation temporelle granulaire

La façon de représenter une entité sous une granularité précise et les conséquences et différences que cela entraîne par rapport aux représentations classiques du temps sont abordées en premier (§3.1). Puis, les rapports possibles entre les différentes granularités sont présentés (§3.2). Enfin, en vue de permettre la communication d'informations d'une granularité vers une autre, les propriétés escomptées des opérateurs de conversion d'entités temporelles entre deux granularités sont proposées (§3.3).

3.1. Représentation explicite du temps sous une granularité

Un des objectifs de la granularité est de disposer d'un système complet capable de représenter le temps à une échelle donnée. Il est donc utile de disposer des deux systèmes proposés plus haut, ensemble ou séparément, et d'une représentation mesurable qui puisse être compatible avec ces deux systèmes. Sous une granularité donnée, l'expression d'une entité temporelle ne fait pas appel à cette granularité qui reste implicite. Par conséquent, il est possible d'utiliser les deux systèmes et de conserver les relations qui existent entre les deux représentations données au §2.3 ainsi que la cohérence interne de chacun des systèmes. Seuls quelques points non négligeables subissent l'influence de la granularité. Ils sont présentés ici. Les difficultés de conservation de la cohérence de ces représentations apparaîtront dans les relations entre différentes granularités.

3.1.1. Représentation numérique ou mesurable

Le point de départ de la représentation est la définition de la granularité (notée g , g' ou g'' par la suite): la taille du plus petit évènement pertinent. La définition selon laquelle un instant est un intervalle arbitrairement petit trouve une réalité ici puisqu'un instant est un intervalle $\langle x^- x^+ \rangle$ tel que $|x^+ - x^-| < g$. La granularité prend alors la place de ϵ dans cette proposition.

Ainsi, un intervalle qui s'exprime en secondes par $[4200 \ 4500[$ sera vu en minutes comme $[70 \ 75[$ et en heures comme l'instant 1 (l'instant correspondant à l'heure numéro 1). Il est clair que passer à l'échelle des heures fait perdre en précision par rapport à l'échelle des minutes (en particulier quant à la durée de l'expression temporelle), mais ceci n'est que la conséquence d'une granularité trop grossière pour rendre compte de la durée. Tout ceci impose d'ores et déjà des règles de conversion du temps mesurable qui seront examinées au §3.3: un intervalle peut devenir un instant ou disparaître si la granularité est augmentée.

Le corollaire de cette définition est qu'il n'est pas nécessaire d'exprimer un phénomène en dessous de la granularité considérée. Par conséquent, toute expression temporelle pourra être exprimée en fonction de cette échelle et l'ensemble des instants peut devenir isomorphe à \mathbb{N} et non plus à \mathbb{R} . Il n'est, en effet, plus nécessaire d'introduire des subdivisions dans le temps: elles ne sont pas pertinentes. En fait, l'utilisation de la granularité permet d'approcher le temps continu en des représentations de plus en plus fines de celui-ci sans jamais l'atteindre. C'est tout l'avantage de la granularité sur des filtres de transformation de format qui présentent sous un grain important (par exemple, en années) des entités temporelles de grain très fin (par exemple, en secondes) sur lesquelles tous les calculs se font. Dans ce dernier cas, toutes les données doivent être communiquées et exploitées sur le grain le plus fin.

La représentation proposée ne permet donc plus de raisonner simplement sur la continuité mais offre une représentation mesurable plus compacte. Il est cependant possible de considérer

les différentes granularités comme fonction d'un niveau de granularité minimal *dense* ($\forall x < z, \exists y; x < y < z$) [MON 92] ou continu. Ceci permet, tout en ayant les avantages des représentations granulaires, de ne pas se couper de la possibilité de raisonner sur la continuité. Cette possibilité ne sera pas étudiée ici.

Ce qui, conceptuellement, pose problème n'est pas de construire une relation de congruence de \mathbb{R} vers \mathbb{N} (il suffit de découper \mathbb{R} en segments de taille 1), mais de construire une relation de congruence de \mathbb{N} vers \mathbb{N} , sachant qu'à un élément de l'ensemble image correspondent plusieurs éléments de l'ensemble de départ. La difficulté peut être surmontée en ne considérant qu'un segment de l'ensemble des entiers (ou des rationnels dans le cas de [MON 92]) comme domaine de la plus petite granularité.

3.1.2. Instants et intervalles

Une autre conséquence de la granularité est qu'un intervalle, sous une certaine granularité, peut être vu comme un instant, sous une granularité plus grossière. Mais le concept de granularité laisse la porte ouverte à sa réciproque: en effet, il faut pouvoir s'attendre à considérer un instant comme un intervalle. Cela a déjà été évoqué par James Allen [ALL 83]: si l'action «aller chercher le courrier» peut être vue sous un certain point de vue comme instantanée, celle-ci peut être décomposée en «aller à la boîte à lettres», «ouvrir la boîte à lettres», «prendre la lettre» et «refermer la boîte à lettres». «Prendre la lettre» peut, à son tour, se décomposer en «regarder dans la boîte à lettres», «réaliser que c'est la lettre qui est perçue», «se saisir de la lettre». Il est possible de décomposer encore plus l'action «réaliser que c'est la lettre qui est perçue» en un ensemble d'inférences... Cette décomposition dépend, bien sûr, des points de vue utilisés. En ce sens, la granularité est un moyen d'unifier instants et intervalles temporels: une entité temporelle peut être représentée comme un instant ou un intervalle suivant la granularité sous laquelle elle est observée.

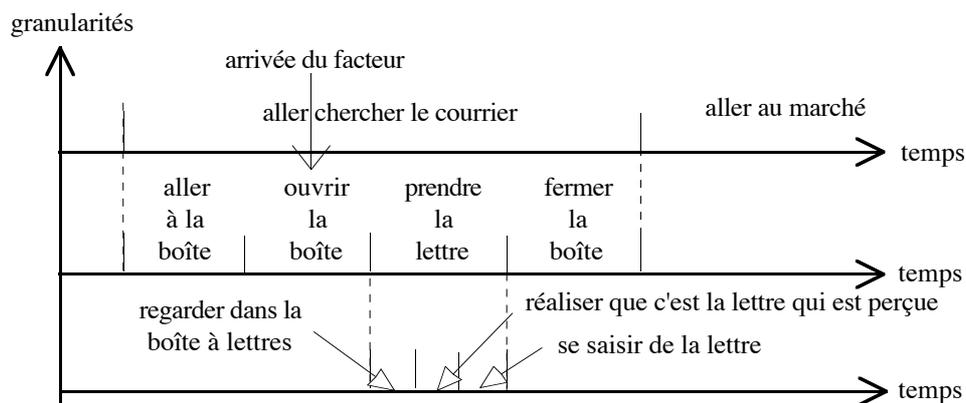


Figure 1. L'exemple du courrier.

En conséquence, les bornes d'un intervalle peuvent être des moments quelconques et, en particulier, des intervalles. Le modèle temporel n'en est pas plus puissant pour autant: en effet,

même si les bornes d'un intervalle sont représentées par un autre intervalle (appelé intervalle-borne), il n'en restera pas moins vrai que la borne de l'intervalle est celle de l'intervalle-borne et ceci récursivement jusqu'à obtenir autre chose qu'un intervalle.

Par ailleurs, l'algèbre d'intervalles permettait déjà d'exprimer le fait qu'un intervalle termine ou commence un autre intervalle. Un intervalle qui en termine un autre est représenté simplement par deux intervalles x et y tels qu'ils soient en relation xy . Il est possible d'exprimer ceci en fonction des instants par $x = \langle x^- \ x^+ \rangle$, $y = \langle y^- \ x^+ \rangle$ et $x^- > y^-$.

3.1.3. Granularité et unité

La granularité a l'avantage de permettre d'exprimer les données automatiquement dans une unité qui sera considérée comme pertinente. Si cette unité se révélait ne pas être pertinente, elle peut, bien sûr, être convertie. À cet égard, il faut disperser la confusion qui réside bien souvent entre granularité et *format*. Dire qu'une expression temporelle doit être exprimée en jours-mois-années, c'est dire deux choses:

- que le format d'expression de l'unité est jour-mois-année;
- que la granularité de ce format est le jour.

Il n'est pas fait mention, ici, des problèmes de format mais uniquement de ceux liés à la granularité. De même, les unités considérées ici seront linéaires et non pas calendaires.

Sous une granularité donnée, la puissance d'expression des expressions temporelles est donc la même qu'avec les intervalles symboliques et une possibilité de mesure du temps permet de se ramener à une définition des instants en fonction de \mathbb{N} .

3.2. Structure de l'ensemble des granularités

Pouvoir exprimer des données et les manipuler sous une granularité donnée est utile mais pouvoir disposer des données introduites à un certain niveau temporel dans tous les niveaux où elles sont exploitables l'est encore plus. C'est par exemple le cas dans toute entreprise lorsqu'il s'agit de faire de la comptabilité analytique: le programmeur évalue son temps de travail en demi-journées qu'il transmet au comptable chargé de la gestion des ressources. Ce dernier traduit ce temps de travail en heures pour le service de la paye et en hommes*jours pour le service de facturation.

Il faut donc étudier comment les expressions vont circuler, non pas d'un point de vue à un autre, mais d'une granularité à l'autre. Pour cela, il faut définir les règles de circulation et de conversion des expressions temporelles.

Les granularités sont définies par la taille des plus petits événements pertinents. Un modèle naturel pour une granularité est un nombre réel exprimant son rapport avec la granularité la plus petite utilisée. Soit G l'ensemble des granularités utilisées à un moment donné dans un système, l'ensemble G peut être structuré de différentes manières:

- pas de structure;
- une relation d'ordre partiel;
- une relation d'ordre total.

L'absence de relation d'ordre total sur l'ensemble des granularités peut provenir de deux sources:

- l'utilisation d'unités non comparables pour exprimer les granularités;
- l'utilisation de variables pour définir les granularités.

L'absence de structure peut relever des deux sources alors que la présence d'une structure partielle révèle la présence de variables dont seuls certains rapports sont connus. Quoiqu'il en soit, les problèmes de granularité variable ne seront pas abordés ici. Cette section, comme les suivantes, suppose que chacun des grains utilisés est convertible en n'importe quel autre grain. Pour cela, il suffit que le rapport entre chaque paire de granularités soit quantifié. Bien qu'il puisse en être autrement, cette hypothèse est bien utile car, sans elle, il est impossible d'exploiter numériquement une donnée fournie avec une granularité g sous un point de vue utilisant une granularité dans laquelle elle n'est pas convertible; c'est pourtant l'idée de la représentation proposée.

Pour un système donné, les granularités utilisées peuvent être ordonnées de manière stricte avec:

- 1) g_{\min} défini comme le grain minimal utilisé ($g_{\min} \in G$ et $\forall g \in G, g \geq g_{\min}$);
- 2) $m(\text{grain})$ défini comme le rapport entre grain et g_{\min} ($\forall g \in G, m(g) = g/g_{\min}$).

Dans la suite, au lieu des granularités, seules leurs classes d'équivalence pour l'égalité seront considérées (avec $g = g'$ ssi $m(g) = m(g')$ et $g < g'$ ssi $m(g) < m(g')$). Par ailleurs, quelques restrictions supplémentaires sur la structure de l'ensemble des granularités seront observées (voir §4.2).

Dans le système proposé par [MON 92], le grain minimal à proprement parler n'existe pas car le dernier niveau de représentation est dense. Il est cependant possible de se ramener à ce qui est dit plus haut si l'on ne considère que les rapports entre granularités supérieures à ce dernier niveau et g_{\min} comme la granularité de l'avant dernier niveau. Les rapports entre ce système et le dernier niveau sont partiellement évoqués dans [MON 92].

3.3. Circulation des expressions temporelles

La *circulation* est le mécanisme qui fait transiter une expression temporelle d'une granularité vers une autre. Il faut bien comprendre que ce n'est pas une «entité» temporelle qui circule (elle n'est pas intrinsèquement modifiée), mais sa représentation. Faire circuler les expressions temporelles permet de chercher comment une expression temporelle fournie au système sous une certaine granularité va pouvoir être exploitée avec une granularité plus fine ou plus large. Il

s'agit donc de trouver la relation de congruence sur laquelle sont fondées les classes d'équivalence. Les différents types de représentations temporelles examinées ici sont soit symboliques, soit numériques, il est donc normal que les règles de circulations soient établies pour ces deux types de représentation.

Par ailleurs, les grains étant maintenant strictement ordonnés, il est possible de distinguer deux opérations de circulation: une *circulation ascendante* (ou montée) qui fait passer une expression d'un grain donné à un grain plus grossier et une *circulation descendante* (ou descente) qui, au contraire, fait passer une expression d'un grain donné à un grain plus fin. Il faut donc établir deux opérateurs de montée et de descente dont la signification est la suivante:

$g \uparrow g'$: convertit une expression exprimée dans la granularité g sous la granularité g' ($g < g'$).

$g \downarrow g'$: convertit une expression exprimée dans la granularité g sous la granularité g' ($g > g'$).

Dans ce qui suit, il sera aussi fait usage de l'opérateur générique

$$g \rightarrow g' \equiv \{g \uparrow g', g \downarrow g'\} = g \uparrow g' \text{ si } g < g', g \downarrow g' \text{ si } g > g' \text{ et Identité sinon.}$$

L'opérateur « \cdot » permet de composer les opérateurs de conversion de telle manière que $g \rightarrow g' \cdot g' \rightarrow g'' x = g' \rightarrow g'' (g \rightarrow g' x)$. La figure 2 présente les deux moyens de représenter les rapports entre deux granularités et celle qui sera utilisée ici.

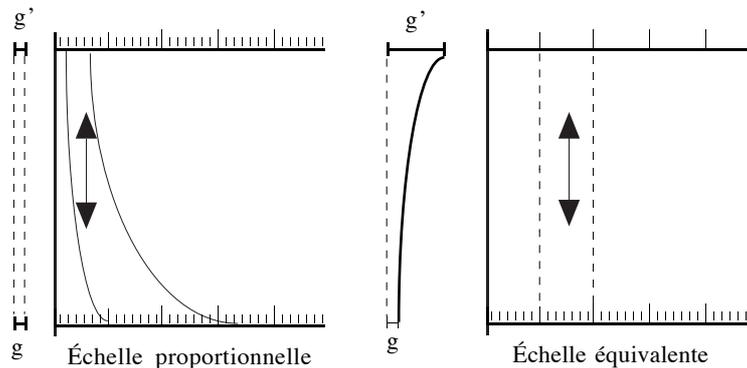


Figure 2. La granularité et la conversion peuvent être représentées sur deux échelles suivant que la granularité est toujours représentée par la même taille (échelle proportionnelle) ou que les différentes granularités sont représentées par leurs tailles relatives (échelle équivalente). C'est cette dernière qui sera utilisée dans les figures qui suivront (et déjà dans la figure 1).

Dans cette section, les propriétés générales souhaitables pour les opérateurs de conversion (ou de circulation) entre granularités sont posées dans l'absolu. Les deux parties suivantes (§4 et 5) présenteront des règles de circulation concrètes et le respect de ces propriétés sera étudié. Toutes les propriétés valides sont énoncées sans preuve. La preuve peut toujours s'obtenir aisément par une vérification exhaustive des assertions. Un programme réalisant toutes les preuves nécessaires ici se trouve dans l'annexe A.

3.3.1. Propriété des conversions de représentations numériques

Les expressions numériques sont représentées sur l'échelle des entiers. L'opérateur de montée est donc une opération de congruence qui, à une expression temporelle exprimée sous

une granularité g , associe une classe d'équivalence qui est une expression temporelle exprimée en g' . Réciproquement, l'opérateur de descente associé à une expression temporelle, exprimée en g' , une expression temporelle, exprimée en g , qui peut être vue comme le représentant de la classe de cette expression en g . Une propriété naturelle prise en compte ici sera celle de *segmentation*: une classe d'équivalence correspond à un segment de droite (ensemble topologiquement clos) dans l'interprétation numérique.

La propriété de *non-croisement* (ou préservation de l'ordre) plus forte, empêche le croisement de deux entités (elle a été proposée par Jerry Hobbs [HOB 85]):

$$x > y \equiv \neg(g \rightarrow_{g'} x <_{g'} y)$$

Elle doit, bien sûr, être aussi valide au niveau symbolique si elle est requise du niveau numérique.

Une propriété intéressante est la *réciprocité*:

$$g \uparrow_{g'} \cdot g' \downarrow_g x = g \downarrow_{g''} \cdot g'' \uparrow_g x = x$$

Cette propriété est impensable: elle signifierait que l'ensemble des expressions temporelles exprimables le soient sous toutes les granularités et avec le même rapport (en particulier toute classe d'équivalence serait un singleton). La notion de granularité n'aurait alors plus aucun intérêt. En effet, si la granularité a un sens, il est naturel de perdre de l'information lors de sa conversion vers une granularité plus élevée où des entités bien distinctes peuvent devenir indiscernables et vers une granularité plus faible sous laquelle la position d'une entité n'est pas exactement connue.

La *transitivité générale* ($g \rightarrow_{g'} \cdot g' \rightarrow_{g''} x = g \rightarrow_{g''} x$) n'est pas non plus possible car elle implique la réciprocity. La propriété de *transitivité cumulée* (ou monotone) est par contre très importante car elle garantit l'indépendance des résultats vis-à-vis des étapes successives que subit une expression temporelle pour monter ou descendre:

$$g \uparrow_{g'} \cdot g' \uparrow_{g''} x = g \uparrow_{g''} x \quad \text{et} \quad g \downarrow_{g''} \cdot g'' \downarrow_{g'} x = g \downarrow_{g'} x$$

Les implications de cette propriété seront examinées plus tard. Une autre propriété possible est celle de *conservation descendante*:

$$g \uparrow_{g'} \cdot g' \downarrow_g x = x.$$

Il est, en effet, souhaitable que l'image représentant la classe d'équivalence soit dans cette classe d'équivalence.

3.3.2. Propriétés des conversions de représentations symboliques

La notion de granularité d'une relation temporelle symbolique est douteuse: dans l'absolu, la relation entre deux entités temporelles est toujours la même. Ce n'est cependant pas le cas des relations entre les représentations de ces entités qui, elles, subissent la granularité. Ces relations seront étudiées ici, car elles permettent de conserver une certaine cohérence entre représentation

numérique et symbolique. Le problème de la circulation symbolique des relations temporelles consiste à savoir répondre à une requête

$$[g]: x \rho y ?$$

(sous la granularité g , x et y sont-elles en relation ρ ?) en ne perdant pas de vue que x et y sont représentées à des niveaux g' et g'' et que la requête concerne un niveau g .

Une première propriété à considérer est donc celle qui conserve les relations entre deux expressions temporelles:

$$x \rho y \equiv g \rightarrow_{g'} x \rho g \rightarrow_{g'} y$$

De nouveau, si la granularité a un sens, elle ne peut respecter une telle propriété: il est en effet naturel de considérer que deux expressions temporelles exprimées sous des granularités différentes peuvent devenir indiscernables. Ainsi, pour un ensemble de relations ρ , la notation $g \rightarrow_{g'} \rho$ peut être conservée car la conversion à un sens. La notation pour les expressions temporelles proprement dites ($g \rightarrow_{g'}$) sera utilisée pour les relations car la transformation d'une relation est conditionnée par celle des expressions temporelles. La relation proposée ci-dessus peut être prise en compte comme une contrainte à la représentation dans un seul sens:

$$\rho \subseteq g \rightarrow_{g'} \rho$$

En considérant que l'opérateur de conversion appliqué à un ensemble de relations donne un autre ensemble de relations, il est souhaitable que:

$$x \rho y \Rightarrow (g \rightarrow_{g'} x) (g \rightarrow_{g'} \rho) (g \rightarrow_{g'} y)$$

Alors, sachant que:

$$x \rho y \equiv y \rho^{-1} x$$

et que,

$$y \rho^{-1} x \Rightarrow (g \rightarrow_{g'} y) (g \rightarrow_{g'} \rho^{-1}) (g \rightarrow_{g'} x)$$

la *distributivité entre conversion et réciprocity* est obtenue:

$$(g \rightarrow_{g'} \rho^{-1}) = (g \rightarrow_{g'} \rho)^{-1}$$

Enfin, les conversions ascendantes et descendantes doivent être liées entre elles par un *principe de compatibilité* qui assure que si une relation peut être vue sous une granularité comme un ensemble de relations, alors chacune d'elles peut être vue sous la granularité initiale comme la relation initiale:

$$r \in \bigcap_{r' \in_g \uparrow^g r} g' \downarrow_g r' \text{ et } r \in \bigcap_{r' \in^{g'} \downarrow_{g'} r} g' \uparrow^g r'$$

Autrement dit, une fois connu le graphe d'un opérateur de conversion vu comme une relation dans Γ^2 l'opérateur de conversion opposé est vu comme la relation réciproque.

Il faut aussi étudier la *distributivité de* $g \rightarrow_{g'}$ sur \times (opérateurs de composition des relations):

$$g \rightarrow_{g'} (\rho_1 \times \rho_2) = (g \rightarrow_{g'} \rho_1) \times (g \rightarrow_{g'} \rho_2)$$

Cela est important vis-à-vis du processus de résolution de contraintes temporelles qui va calculer les relations entre deux expressions sous une certaine granularité et exporter ensuite les résultats à tous les niveaux.

De même, il est souhaitable que l'application des opérateurs de conversion aux relations entre intervalles ne dépendent pas de leur expression (sous forme d'intervalles ou d'instant). La relation doit donc respecter la propriété d'*indépendance de la représentation*:

$$g \rightarrow_{g'} p = \Leftarrow g \rightarrow_{g'} \Rightarrow p \text{ et } g \rightarrow_{g'} p = \Rightarrow g \rightarrow_{g'} \Leftarrow p$$

sachant que l'opérateur de conversion s'applique sur les ensembles de quadruplés de relations entre instants en accord avec leur définition logique (il est distribué sur les sous-formules et la forme normale disjonctive est ensuite rétablie de manière à pouvoir appliquer \Leftarrow ; voir §2.3.1). Cette propriété s'entend lorsque l'opération est définie, c'est-à-dire lorsque les relations entre instants n'interdisent pas qu'ils représentent des bornes d'intervalles. Elle n'est qu'une simple conséquence de la commutativité de $g \rightarrow_{g'}$ et avec \Rightarrow d'une part et \Leftarrow d'autre part.

En résumé, les représentations classiques du temps sont conservées sur chacune des granularités. Ces représentations peuvent circuler d'une granularité à une autre moyennant certaines transformations. Un ensemble de propriétés permettant de conserver la cohérence entre les modèles des représentations disponibles sous différentes granularités ont été proposés. Des propositions concrètes vont être formulées dans les sections suivantes pour définir des opérateurs de montée et de descente tant au niveau symbolique qu'au niveau numérique.

4. Circulation ascendante

La circulation ascendante est affaire d'acquisition. Il s'agit de transmettre une information acquise sous une certaine granularité vers un point de vue de granularité plus grossière. Ceci est réalisé dans n'importe quel système: les capteurs ne fournissent des informations, et des informations temporelles en particulier, qu'avec une certaine précision. Cette précision n'est pas intrinsèque à ce qui est capté mais au capteur qui exprime la mesure avec une certaine granularité (problème de l'échantillonnage). L'acquisition initiale d'une donnée temporelle révèle une circulation ascendante implicite réalisée par le capteur. Celle-ci est ici généralisée et rendue explicite. Il faut noter que tous les problèmes qui vont être présentés se produisent déjà, et doivent être résolus, lors d'une circulation implicite.

4.1. Conversion ascendante symbolique

Deux problèmes se posent pour la montée des relations temporelles (la relation entre x et y n'est disponible que sous une granularité inférieure à g). Tout d'abord, les relations établies au niveau inférieur sont exportables tant que les unités mises en relation sont toujours visibles. L'autre problème est la perte de précision des relations/contraintes temporelles: en effet, sous

une granularité g deux expressions temporelles peuvent être en relation de précédence stricte (b) mais cette relation peut s'atténuer si ces expressions temporelles sont converties dans une granularité plus élevée (b, m, \dots).

En tenant compte de la contrainte de non-croisement et de toutes les imprécisions pouvant être introduites par la montée des expressions temporelles x et y (et ceci indépendamment des granularités considérées), le tableau de conversion ascendante des instants est le suivant:

relation: r	$g \uparrow g' r$
$<$	$< =$
$=$	$=$
$>$	$> =$

Table 6. Conversion ascendante des relations entre instants.

Cette table obéit encore à la contrainte de non croisement. De même, les règles pour les intervalles sont fixées comme suit:

relation: r	$g \uparrow g' r$	réciproque: r^{-1}	$g \uparrow g' r^{-1}$
b	$b m$	b^{-1}	$b^{-1} m^{-1}$
d	$d f s e$	d^{-1}	$d^{-1} s^{-1} f^{-1} e$
o	$o f^{-1} s m e$	o^{-1}	$o^{-1} s^{-1} f e m^{-1}$
s	$s e$	s^{-1}	$s^{-1} e$
f	$f e$	f^{-1}	$f^{-1} e$
m	m	m^{-1}	m^{-1}
e	e		

Table 7. Conversion ascendante des relations entre intervalles.

Les tables de conversion ascendante des relations possèdent un certain nombre de propriétés. Tout d'abord, la montée et la réciprocity sont commutatives:

$$g \uparrow g' p^{-1} = (g \uparrow g' p)^{-1}$$

D'autre part, elles sont indépendantes de la représentation. En effet, si les intervalles sont exprimés en fonction de leurs extrémités (voir table 4), les règles de conversions des extrémités donnent lieu aux mêmes relations entre intervalles que les règles de conversions entre intervalles (voir table 7).

Il faut bien remarquer qu'il n'est pas obligatoire de convertir avec l'aide du tableau de conversion une relation de faible granularité en une relation plus grossière. En effet, si une entité temporelle est avant une autre, cela est vrai dans l'absolu et ne dépend pas de la granularité dans laquelle est représentée l'entité. Une solution alternative consiste donc à

conserver entre chaque instant ou intervalle la relation qui lui est fournie au niveau le plus précis. Toutes les propriétés évoquées plus haut seront alors valides, mais la liaison avec les opérateurs de conversion (numériques en particulier, voir §4.2) n'est plus assurée. Le tableau indique donc comment la relation entre deux entités serait vue si la précision la plus fine à laquelle ces entités étaient connues était celle de la granularité la plus élevée.

Toujours sous la même hypothèse de non croisement, la table de transitivité de \times_3 est bien distributive par rapport à la conversion ascendante.

$$({}_g \uparrow^{g'} \rho_1) \times_3 ({}_g \uparrow^{g'} \rho_2) = {}_g \uparrow^{g'} (\rho_1 \times_3 \rho_2)$$

Ce n'est pas le cas des intervalles. En effet, soient trois intervalles x, y et z tels que xby et yz , la règle de transitivité donne $x\{b o m d s\}z$ ce qui, une fois converti dans une granularité plus basse, donnera $x\{b m e d f s o f^1\}z$. Si, par contre, les relations sont converties d'abord, il en résulte $x\{b m\}y$ et $y\{d f s e\}z$, ce qui, une fois la transitivité appliquée, rend $x\{b o m d s\}z$. Il semble donc que la caractérisation obtenue soit plus précise en opérant d'abord la conversion puis la propagation. En effet, en propageant avant de convertir, l'information qu'il existe un intervalle y interdisant à x de terminer z est perdue. Toute la question est de savoir s'il est nécessaire de disposer de toute la précision; peut-être l'espace occupé par y n'est-il pas pertinent sous la granularité la plus élevée. Il est impossible de savoir cela symboliquement.

La propriété suivante concernant la «distributivité» est vérifiée:

$$({}_g \uparrow^{g'} \rho_1) \times_{13} ({}_g \uparrow^{g'} \rho_2) \subseteq {}_g \uparrow^{g'} (\rho_1 \times_{13} \rho_2)$$

ce qui signifie que pour utiliser les contraintes de la manière la plus précise qui soit, à un niveau de granularité plus élevé, il faut d'abord les convertir avant de les propager. Tant de précision n'est pas toujours utile, mais a deux avantages: elle limite légèrement la possibilité de faire apparaître des inconsistances et elle a une représentation plus compacte.

La conversion instants/intervalles (table 5) est toujours compatible avec l'opérateur de montée, c'est-à-dire que la comparaison d'un instant et d'un intervalle sur la base des instants de début et de fin de ce dernier reste valide après une montée. La montée de ces relations est donc la fonction identité (si les expressions temporelles concernées persistent dans la montée).

4.2. Conversion ascendante numérique

La circulation ascendante ne pose pas de problème numérique. Ce type de conversion fait simplement disparaître certaines expressions et transforme certains intervalles en instants.

Pour définir l'opérateur de montée associant à une expression temporelle mesurée dans une granularité une autre expression mesurée dans une granularité plus élevée, il est possible de faire plusieurs choix (illustrés par la figure 3) respectant la contrainte de non croisement:

- l'instant précédent dans la granularité supérieure: ${}_g \text{prec}^{g'} x = E(x * g' / g)$ (cette option avait été retenue par Jerry Hobbs pour la granularité des mesures de température [HOB 85]);

- l'instant suivant dans la granularité supérieure: $g_{\text{suiv}}^{g'}x = E(x * g' / g) + 1$;
 - l'instant le plus proche dans la granularité supérieure
- $g_{\text{proche}}^{g'}x = \text{si } (x * g' / g - g_{\text{prec}}^{g'}x) < (g_{\text{suiv}}^{g'}x - x * g' / g) \text{ alors } g_{\text{prec}}^{g'}x \text{ sinon } g_{\text{suiv}}^{g'}x.$

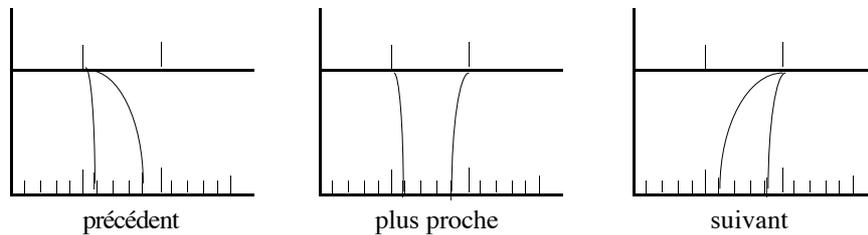


Figure 3. Les différents choix possibles de conversions ascendantes d'instant et intervalles.

L'opération similaire sur les intervalles consiste à rechercher le meilleur représentant pour l'expression temporelle «une soixantaine d'années»: s'agira-t-il de 60, 65 ou 70?

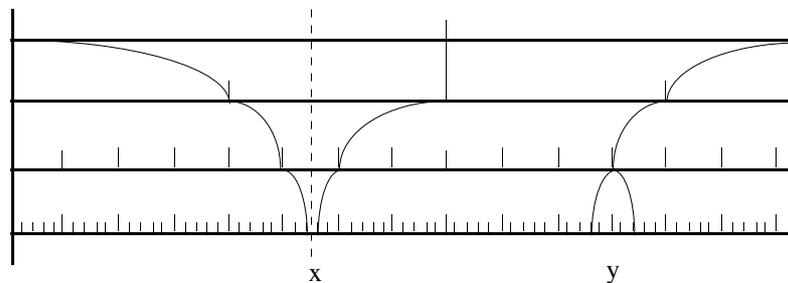


Figure 4. «plus proche» semble un choix peu judicieux car il laisse perdurer des intervalles eu égard à leur position temporelle et non à leur taille. Ainsi, un intervalle (x) peut se perpétuer alors qu'un autre intervalle (y), plus étendu, va disparaître dès la première montée.

Enfin, aucun des trois opérateurs de montée ne possède la propriété de transitivité cumulée qui avait été retenue comme très importante. Ceci est illustré par la figure 5.

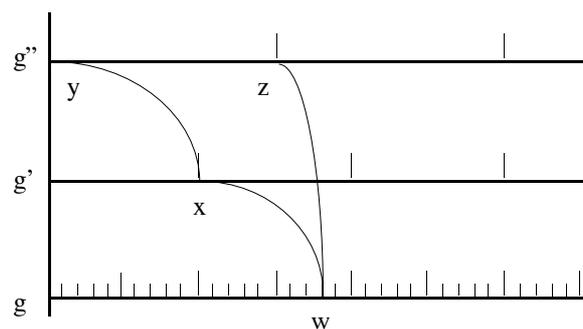


Figure 5. En cas de décalage des échelles (c'est-à-dire qu'à une graduation de la granularité supérieure ne corresponde pas de graduation de la granularité inférieure), la propriété de transitivité cumulée n'est pas vérifiée:

$$g \uparrow^{g'} . g' \uparrow^{g''} w = y \neq z = g \uparrow^{g''} w.$$

Pour obtenir cette propriété de transitivité cumulée à l'échelle de tout le système, il faut que la propriété suivante soit respectée:

$$\forall g, g' \in G, \exists n \in \mathbb{N}; g = n.g'$$

Cette propriété est prise pour base du système de [MON 92]. Cette contrainte est relativement forte surtout lorsqu'il s'agit de l'appliquer à des granularités bien établies parce que l'apanage de spécialistes (ne serait-ce que les mètres et les pieds). Mais c'est à ce prix que les opérateurs $g_{\text{suiv}}^{g'}$ et $g_{\text{prec}}^{g'}$ respecteront la transitivité cumulée.

Le principe de la transformation ascendante des intervalles est:

$$\text{Si } g \uparrow^{g'} \langle x^- x^+ \rangle = \langle g \uparrow^{g'} x^- \ g \uparrow^{g'} x^+ \rangle \text{ alors } g \uparrow^{g'} x^- \neq g \uparrow^{g'} x^+ \text{ sinon } g \uparrow^{g'} x^- (= g \uparrow^{g'} x^+).$$

Il est à remarquer que la condition de non croisement permet d'affirmer que $\langle g \uparrow^{g'} x^- \ g \uparrow^{g'} x^+ \rangle$ est bien un intervalle. Par ailleurs, ce principe (dans le cas des trois opérateurs proposés ci-dessus) entraîne la conclusion escomptée suivante:

$$\forall x^-, x^+; x^+ - x^- > g'/g \Rightarrow g \uparrow^{g'} x^- \neq g \uparrow^{g'} x^+$$

dont la réciproque n'est pas vraie. Il ne faut, en effet, pas utiliser seule la règle proposée par Jerry Hobbs:

$$\forall x, y (g \uparrow^{g'} x = g \uparrow^{g'} y) \equiv |x - y| < g'/g,$$

qui revient à dire qu'il n'existe qu'un seul instant (voir §8)!

Enfin, il est aussi possible de définir des relations *numérico-symboliques* («deux heures avant»...). Disposer de telles relations permettrait de conserver une certaine précision dans la circulation ascendante des contraintes et, en particulier, le problème rencontré avec la table de transitivité ne se poserait pas: il sera possible de conserver, dans les relations, la présence d'un intervalle dont l'importance empêche l'identification de deux expressions qui ne doivent être confondues.

5. Circulation descendante

La circulation descendante semble, a priori, plus difficile à réaliser que la circulation ascendante. Ceci est dû au fait que pour un même moment numérique, il existe plusieurs représentants possibles dans la granularité inférieure: il faut donc choisir un représentant pour une classe de moments équivalents entre eux. Mais surtout, cela provient du fait que le représentant de cette classe peut aussi être un intervalle (voire plusieurs).

5.1. Conversion descendante symbolique

En descente, les intervalles restent des intervalles et les relations entre entités temporelles s'affaiblissent, c'est-à-dire que l'égalité de deux instants peut se révéler contredite sous une granularité plus fine.

En fait, les règles de propagation vers le bas posent des problèmes parce que:

- 1) Descendre un instant peut donner soit un instant, soit un intervalle (en tout cas cette expression temporelle existe encore au niveau inférieur).

2) Il est possible de descendre les contraintes, mais les contraintes perdent en précision avec la granularité.

La règle de descente pour les instants symboliques est la suivante:

relation: r	$g \downarrow_g r$
<	<
=	< = >
>	>

Table 8. Conversion descendante des relations entre instants.

Les règles de transformation des contraintes entre intervalles sont fournies dans la table ci-dessous:

relation: r	$g \downarrow_g r$	réciproque: r^{-1}	$g \downarrow_g r^{-1}$
b	b	b^{-1}	b^{-1}
d	d	d^{-1}	d^{-1}
o	o	o^{-1}	o^{-1}
s	o s d	s^{-1}	$d^{-1} s^{-1} o^{-1}$
f	d f o ⁻¹	f^{-1}	$d^{-1} f^{-1} o$
m	b m o	m^{-1}	$o^{-1} m^{-1} b^{-1}$
e	$o f^{-1} d^{-1} s e s^{-1} d f o^{-1}$		

Table 9. Conversion descendante des relations entre intervalles.

Ces deux tables sont conformes au principe de compatibilité avec les tables 6 et 7. Les seules contraintes qui sont prises en compte au niveau «symbolique» sont que deux instants identiques à un niveau peuvent être distincts sous une granularité inférieure. De même, deux instants discernables sous une granularité élevée le resteront sous une granularité plus faible. Cela permet de garantir la condition de non croisement:

$$x > y \Rightarrow \neg(g \downarrow_g x < g \downarrow_g y)$$

De nouveau, cette relation de descente commute avec la réciprocity, c'est-à-dire que:

$$g \downarrow_g r^{-1} = (g \downarrow_g r)^{-1}$$

Il est possible de vérifier que la relation de descente est indépendante de la représentation; c'est-à-dire que si les intervalles sont exprimés en fonction de leurs extrémités (voir table 4), les règles de conversions des extrémités donnent lieu aux mêmes relations entre intervalles que les règles de conversions entre intervalles (table 9). Par contre, la transposition de la table 5 est génératrice d'imprécision dans les positions relatives des instants et intervalles: à chaque fois que l'égalité est prise comme critère de comparaison, les points peuvent être dissociés sous une granularité plus fine (voir table 10).

relation: r	$g \downarrow_{g'} r$
<	<
\equiv	< \equiv
>	\equiv >

Table 10. Conversion des relations entre instants et intervalles. La table obtenue à l'aide des relations (avant, commence, pendant, termine et après; voir §2.3.2) eut donné une similaire incertitude quant à la position de l'instant égal à une borne.

De même que précédemment, la composition de relations n'est pas distributive par rapport à la conversion. En effet, soient trois intervalles x , y et z en relation de la façon suivante: xy et yz , la transitivité indique naturellement que xz ce qui, une fois converti, indique aussi que xz . À l'opposé, si la conversion est réalisée d'abord, elle donne xy et $y\{o s d\}z$, ce qui une fois propagé conduit à $x\{b o m d s\}z$. Ici, la descente initiale des relations a ajouté de l'incertitude quant à la relation entre y et z . Cette incertitude a bien sûr subsisté lors de la propagation de contraintes. Le résultat concernant les rapports entre propagation de contraintes temporelles et changement de granularité est le suivant:

$$g \downarrow_{g'} (p_1 \times p_2) \subseteq (g \downarrow_{g'} p_1) \times (g \downarrow_{g'} p_2).$$

Le même résultat est valide pour les instants. Il conduit à opérer la propagation au niveau le plus élevé avant de descendre les contraintes résultantes. C'est en particulier le cas dans l'exemple précédent. Sachant que «l'arrivée du facteur» a lieu lorsque «j'allais chercher le courrier» qui a précédé «j'allais au marché», il s'en suit que «le facteur est passé» avant que «je n'aille au marché» et ce résultat peut être répercuté sous une granularité plus faible.

Encore une fois, le problème posé par cette propagation de contraintes pourrait être résolu en admettant que l'incertitude introduite par la descente est négligeable devant la différence entre x et y . Cela peut être obtenu grâce à des relations numérico-symboliques du type «deux jours avant»...

5.2. Conversion descendante numérique

L'aspect numérique est bien plus délicat. Il ne faut plus simplement trouver une classe d'équivalence, mais trouver un représentant de la classe d'équivalence considérée à la granularité supérieure. De surcroît, pour un instant, ce représentant de la classe d'équivalence peut être arbitrairement un autre instant (dans le cas où la persistance des instants à travers les niveaux est permise) ou un intervalle.

Un instant x peut donc être représenté par:

- 1) un instant. Le problème est alors de savoir où le placer: x^*g/g' , $x^*g/g'+1$? (la performance de Burke au 100m de 12" à la seconde doit elle être créditée de 11"01, 12" ou 12"99 au 1/100°?) Il s'agit d'une simple question de choix pour le représentant. Cela ne

pose pas, par contre, de problèmes difficiles. Cet opérateur de descente canonique peut être choisi en fonction de l'opérateur de montée de façon à disposer de la propriété de conservation descendante ($g' \downarrow_{gg} \uparrow^{g'} x = x$). Par conséquent,

$$g \downarrow_g x = x * g / g' \text{ si } g \uparrow^{g'} = g \text{ prec } g' \text{ et } g \downarrow_g x = x * g / g' + 1 \text{ si } g \uparrow^{g'} = g \text{ suiv } g'.$$

- 2) un intervalle de taille maximale g/g' . Une contrainte importante pour cet intervalle est de faire en sorte que l'instant en lequel il se convertisse en g' soit bien x (propriété de conservation descendante). Tout dépend donc, de nouveau, de l'option prise pour la conversion ascendante.

Une méthode astucieuse permettant de résoudre ce problème est de définir des «motifs» de conversion d'une granularité en une autre (c'est-à-dire la façon de décomposer un évènement particulier sous une granularité plus fine). Ces motifs présentent l'avantage de pouvoir être attachés à une granularité précise mais aussi à l'évènement auquel est attachée l'expression temporelle. Ils constituent la possibilité d'introduire dans le processus de conversion de la connaissance liée au domaine. Il est même possible de définir des motifs de conversion complexes. C'est le cas des histoires (voir §6.2).

Une autre méthode consiste à utiliser explicitement les outils proposés pour représenter l'incertitude temporelle, c'est le cas des *domains d'occurrences possibles* (DOP) introduits par Jean-François Rit [RIT 88] qui permettent de représenter l'expression temporelle à descendre à l'aide de l'ensemble de contraintes qui pèsent sur elle. Les DOP décrivent un ensemble convexe d'intervalles dans lequel se trouve un intervalle particulier dont la position et la taille ne sont pas connues exactement. Un DOP est caractérisé par un quadruplé (début au plus tôt, début au plus tard, fin au plus tôt, fin au plus tard). Ainsi, à un intervalle $\langle x^- x^+ \rangle$, pourra être associé un DOP:

$$g \downarrow_g \langle x^- x^+ \rangle = (g/g' x^-, g/g' x^- + 1 \quad g/g' x^+, g/g' x^+ + 1)$$

Ces deux méthodes sont de nature différentes: la première contraint une représentation imprécise en ajoutant de l'information aux pures notions temporelles alors que la seconde offre un moyen de représentation de l'imprécision. Elles sont donc utilisables à des fins différentes.

En conclusion, il ne faut jamais perdre de vue que si une donnée est transmise d'une granularité vers une autre c'est parce qu'elle n'est pas disponible sous cette dernière granularité et qu'il est intéressant d'en disposer c'est peut être aussi parce que ces phénomènes sont mieux traités à la granularité indiquée. Aussi, si la conversion pose des problèmes, c'est toujours, finalement pour un gain substantiel.

Il faut enfin noter que dans les cas de la montée comme de la descente, l'appauvrissement des contraintes dû au changement de granularité est réellement symbolique: il ne peut s'appliquer qu'une fois. Ainsi:

$$\forall g > g' > g'' \text{ ou } g < g' < g'', g \rightarrow g', g' \rightarrow g'' \text{ r} = g \rightarrow g' \text{ r}$$

Ceci est tout à fait normal du fait que les relations sont considérées de la même façon, que l'opérateur soit appliqué de conversion vers g' ou vers g'' . C'est donc une propriété intéressante. En particulier, cela implique que la propriété de transitivité cumulée soit valide au niveau symbolique sans autre restriction.

Une fois les opérateurs de conversion proposés et leurs propriétés établies, il est possible de les utiliser de différentes manières de façon à faire coopérer différentes granularités. L'utilisation des opérateurs dépendra des propriétés requises par l'application. La section suivante présente une utilisation possible de la représentation granulaire sur un exemple simple.

6. Inférences temporelles

Représenter les informations temporelles communiquées et les restituer n'est pas suffisant pour un système de représentation temporel. Il faut qu'il soit capable de déterminer le plus tôt possible une inconsistance dans l'ensemble des informations et de compléter les informations communiquées quand le modèle du temps sous-jacent l'autorise, c'est le but des inférences temporelles.

La résolution de problèmes (et, en particulier, la satisfaction de contraintes) dans des mondes ouverts et complexes requiert une connaissance importante. Disposer de tant de connaissance exige d'éviter le piège de son exploration systématique afin de résoudre un problème bien *localisé*. Les systèmes de représentation de connaissance et de raisonnement peuvent tirer parti d'une organisation hiérarchique afin de résoudre localement les problèmes locaux et de résoudre plus globalement les problèmes plus étendus. En ce sens, la granularité peut aider à éviter l'explosion combinatoire en restreignant l'espace de recherche.

La propagation de ces contraintes a posé des problèmes lors de l'étude de la distributivité des opérateurs de conversion par rapport à la transitivité des relations. La granularité doit cependant permettre d'appliquer la propagation de contraintes de la manière la plus pertinente possible. C'est-à-dire au niveau où les résultats sont le plus ou le moins précis suivant la granularité escomptée. Ceci peut être réalisé à l'aide d'un solveur de contraintes temporel classique capable d'effectuer les conversions de granularité adéquates. Un travail fait sur le logiciel TROPES qui lie granularité, représentation de connaissance par objets et propagation de contraintes temporelles est présenté ici.

6.1. TROPES et la représentation du temps

TROPES [MAR 90, 93] est un système de représentation de connaissance par objets. Il intègre la notion de point de vue de telle sorte qu'un objet puisse être vu de manière différente suivant chaque point de vue. Johannes Stein [STE 91] a réalisé sur le logiciel TROPES un système de représentation temporel granulaire. Dans cette représentation, un événement est un objet référençant son occurrence temporelle, l'histoire à laquelle il appartient et l'histoire qui le

représente sous une granularité plus faible. Une occurrence temporelle est aussi un objet qui est visible différemment suivant les points de vue (il peut être invisible, visible comme un instant à l'aide de son attribut `position` ou visible comme un intervalle avec les attributs `debut` et `fin`). Il est clair qu'implémenter la granularité à l'aide des points de vue est une déviation de la destination des points de vue: il n'y a pas équivalence entre point de vue et granularité donc pas de raison de les joindre. Ce n'est ici qu'une facilité d'implémentation.

Ainsi, sur l'exemple du courrier évoqué plus haut, trois évènements sont dans un point de vue: «aller chercher le courrier», «aller au marché» et «arrivée du facteur» dont l'occurrence temporelle est un intervalle. Les deux premiers objets sont associés par une contrainte portant la valeurs $\{b\ m\}$. Sous une autre granularité, «aller chercher le courrier» peut être représenté par quatre évènements «aller à la boîte», «ouvrir la boîte», «prendre la lettre» et «fermer la boîte» successivement liés par la même relation.

Une contrainte est représentée par un objet contenant deux attributs pour les occurrences temporelles en relation et une liste de symboles représentant les relations. Ces relations sont localement réduites à l'aide d'un algorithme classique de propagation de contraintes temporelles [ALL 83]. Ainsi, la réponse à la question «quelle est la relation entre «aller à la boîte» et «fermer la boîte»?» s'obtient en créant un objet relation entre ces deux évènements dont la liste des symboles est l'ensemble des 13 relations et en demandant au propagateur de contraintes de réduire ces contraintes. Le propagateur est alors capable de retourner la réponse $\{b\}$.

Sur un unique point de vue auquel est associé une granularité, la résolution des contraintes temporelles fonctionne donc comme dans un système de représentation de connaissance classique. L'intérêt du système réside, bien sûr, dans la collaboration entre les granularités. Cette collaboration se fait au travers des histoires.

6.2. Traitement des histoires

Une *histoire* permet d'exprimer la conversion d'un évènement sous une granularité en un ensemble d'évènements, sous une granularité plus fine, auquel correspond un ensemble d'expressions temporelles et de contraintes. Une histoire est implémentée par un objet contenant une liste d'évènements et une liste de relations entre ces évènements. Dans l'exemple du courrier, l'histoire correspondant à «aller chercher le courrier» contient l'ensemble des évènements le décomposant ainsi que les relations exprimées entre eux.

Les contraintes peuvent être résolues à un certain niveau de granularité en considérant les histoires comme des expressions temporelles simples. Puis, il est possible de passer à une granularité inférieure et de résoudre les contraintes internes à une histoire précise. Cela permet de répondre à une requête se plaçant à un niveau précis sans résoudre les contraintes à un niveau inférieur. Il est possible de hiérarchiser cette propagation et donc de tirer parti de la structure hiérarchique des différents grains. Ainsi, le système ne redescendra pas à une

granularité très fine si une contrainte peut se résoudre à la granularité courante (voir [BON 88]). La granularité devient alors une heuristique pour traiter les contraintes temporelles.

Le système est capable de transposer un objet représentant un évènement d'une granularité vers une autre en utilisant la décomposition de cet évènement en histoire. Le propagateur utilise alors cette décomposition pour opérer ces déductions. Il exploite les propriétés établies pour la propagation de contraintes entre différentes granularités: le propagateur de contraintes est classique mais convertit les objets temporels dans la plus haute granularité commune aux objets à comparer afin de procéder à la propagation de contraintes. Le résultat peut, ensuite, être descendu si nécessaire. Ceci assure à la propagation de contraintes le maximum de précision puisque les contraintes sont montées avant d'être propagées puis propagées avant d'être descendues. Ceci est tout à fait en accord avec les résultats obtenus dans la section précédente. En réalité, l'algorithme ne raisonne que sur les histoires: la remontée se fait d'histoire en histoire, en résolvant à chaque étape l'ensemble des contraintes locales à l'histoire courante avant de remonter les contraintes existant entre l'élément à remonter et l'histoire qui l'englobe.

Ainsi, dans le cas du récit présenté à la fin du paragraphe précédent, il est possible de déduire assez simplement que le facteur est arrivé avant que la personne ne soit allée au marché: en effet, le moment d'arrivée du facteur est celui d'ouverture de la boîte à lettres, or celui-ci est inclus dans le moment d'«aller chercher le courrier» qui précède l'«aller au marché».

Dans la réalité, pour résoudre ce problème, le système a besoin de connaissances linguistiques (qui ne sont ici que simulées). Ce raisonnement, nommé *identification d'évènement*, permet de replacer l'évènement concernant «l'arrivée du facteur» par rapport aux autres évènements. Pour cela, la seule information disponible est que cet évènement est simultané à l'évènement «fermer la boîte à lettres». Deux problèmes se posent: le second évènement n'est pas apparu dans le cours du texte et le niveau de granularité courant est celui d'«aller chercher le courrier». L'algorithme à utiliser pour résoudre ces références est globalement le suivant:

- (1) Essayer d'identifier l'évènement avec les évènements de la granularité courante.
- (2) En cas d'échec de (1), décomposer les évènements de la granularité courante à l'aide de leur histoire, passer à la granularité inférieure et réappliquer (1).

Bien entendu, cette ébauche de procédure n'est pas complète, elle fait l'impasse sur la possible recherche dans des granularités plus élevées (voir [GAY 91] pour un exemple d'algorithme plus détaillé) et elle ne fait pas usage de connaissance pragmatique pour restreindre l'espace de recherche. Elle permet cependant d'identifier l'évènement «fermer la boîte à lettres».

Poser la contrainte de simultanéité entre «fermer la boîte à lettres» et «arrivée du facteur» ne peut se faire qu'entre entités de même granularité. L'évènement «arrivée du facteur» est donc descendu sous la granularité inférieure. La propagation de contraintes temporelles va ensuite permettre d'établir, entre autre, la relation existante entre l'«arrivée du facteur» et l'évènement

«aller chercher le courrier»: $\{d\}$. Cela est permis parce que l'histoire lie toujours ses bornes avec celles de l'évènement de niveau plus élevé qu'elle représente. Par contre, les contraintes existant entre l'évènement plus élevé et les autres évènements de granularité supérieure ne sont pas descendues. Cette relation est remontée au niveau de la requête et est préservée. La propagation de contraintes au niveau supérieur peut alors jouer et déduire par transitivité que $\{d\} \times \{b, m\}$ donne $\{b\}$ et que par conséquent: «le facteur est arrivé avant que j'aille au marché».

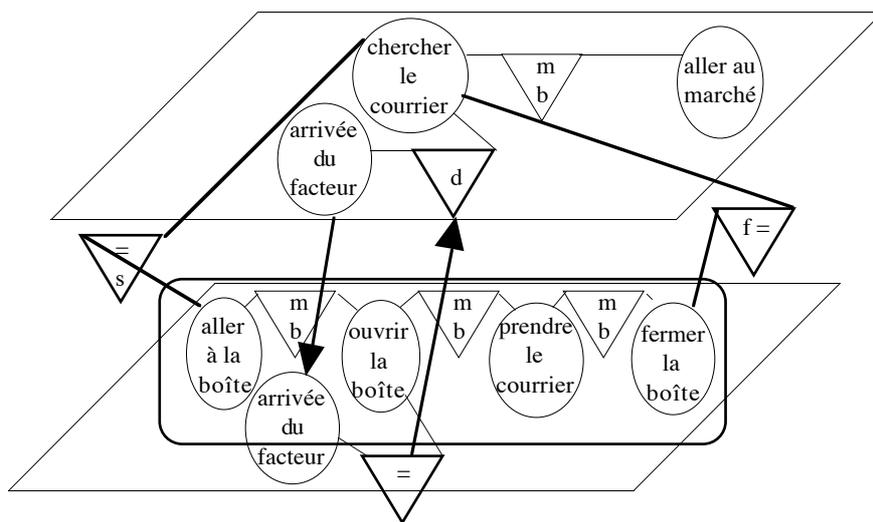


Figure 6. Les deux granularités impliquées dans la compréhension du récit sont présentées ci-dessus. En gras, figurent les trois étapes de la résolution de contraintes: Le rectangle représente la transformation d'aller «chercher le courrier» (C) en une histoire plus complexe. La flèche descendante représente la descente de l'évènement «arrivée du facteur» (F). La flèche montante représente la montée de la relation entre F et C qui permettra de situer F au niveau supérieur et d'en déduire sa position par rapport à «aller au marché».

Dans le même ordre d'idées, la recherche en résolution de contraintes temporelles prône l'identification de petits ensembles de contraintes connexes pour localiser la propagation. C'est l'exploitation du concept de localité évoqué en introduisant les *intervalles de référence* [ALL 81, KOO 89]. Il s'agit en fait d'un ensemble d'intervalles dont toutes les relations sont calculées en référence à un intervalle précis et qui n'ont de relation avec les autres intervalles que par le biais de leur intervalle de référence.

L'histoire permet de définir des intervalles de référence en les dotant d'une sémantique pertinente vis-à-vis du domaine d'application et non plus du seul processus de propagation de contraintes. À cet égard, les histoires sont à mi-chemin entre les intervalles de référence et les *scripts* [SCH 82]. D'autre part, les composants d'histoires peuvent être utilisés de manière paresseuse, c'est-à-dire qu'ils existent implicitement mais qu'il est inutile de les créer tant qu'ils ne sont pas utilisés. Ainsi, c'est l'algorithme d'identification d'évènements qui crée les éléments d'histoire lors de sa recherche.

6.3. Développements

L'implémentation de la représentation temporelle sur la première maquette de TROPES a permis d'expérimenter le bien fondé de l'approche suivie. Elle n'est qu'un banc d'essais pour la notion d'histoire et ne prétends pas être utilisable en l'état. En particulier, il y manque:

- Les aspects numériques: y lier les aspects numériques nécessite le développement d'un gestionnaire général du temps de type TMM ("Time map manager" [DEA 87, GHA 89]) permettant de stocker et d'inférer efficacement les informations à la fois numériques et symboliques.
- L'identification automatique des évènements: l'instanciation des histoires doit être déclenchée par l'utilisateur. Les histoires elles-mêmes sont créées à l'aide d'une procédure fournie par l'utilisateur (qui crée les évènements et pose les contraintes) au lieu d'être exprimées dans un langage particulier.
- Des algorithmes complets vis-à-vis de la recherche dans les granularité plus élevées [GAY 91].

Par ailleurs, il apparaît, au cours de l'exposé, que la notion de décomposition est importante dans la gestion des changements de granularités. Si cette notion n'est pas abordée d'emblée et que l'exposé en reste à des notions classiques de représentation du temps, c'est que la représentation de la composition dépasse largement le cadre de la représentation du temps et n'a pas encore reçu de réponse satisfaisante. Il semble que la voie la plus prometteuse dans la liaison entre points de vue et granularité consiste à considérer la liaison entre une expression temporelle et son histoire comme un lien de composition de TROPES [MAR 93] (une constatation similaire a été exploitée dans [CIA 93b]).

7. Granularité spatiale

Les aspects caractéristiques du temps (l'irréversibilité en particulier) n'ont pas été pris en considération ici. L'exploitation du temps ne concerne que des points ou des segments de droites sur une droite. Il devrait donc être possible d'étendre la granularité à d'autres représentations dont la droite est aussi le modèle (séquence génomique par exemple [GUI 93, SCH 94]) ainsi qu'à d'autres modèles à plusieurs dimensions. Ainsi, les solutions proposées devraient s'appliquer à la granularité de n'importe quel type de représentations. À l'instar du raisonnement temporel, le raisonnement sur l'espace semble être un champ d'utilisation de la granularité.

Par exemple, la carte Didier Richard consacrée au Vercors n'est pas une simple carte au 1/50 000e: elle contient aussi sur sa couverture une carte au 1/1 000 000e et un schéma de la région Rhône-Alpes au 1/4 000 000e sur laquelle se trouvent les contours des autres cartes de la collection. Ce type de disposition est tout d'abord pratique (voir figure 7), mais il pose aussi beaucoup de problèmes aux cartographes. Ce sont les problèmes rencontrés lors de la

construction numérique de la granularité: où se trouve le centre des villes lorsqu'elles doivent être représentées par un point à une échelle plus petite, quels éléments doivent disparaître (la seconde carte retient les villes principales, les autoroutes, les nationales et les fleuves alors que la dernière se cantonne aux grandes villes et fleuves)?

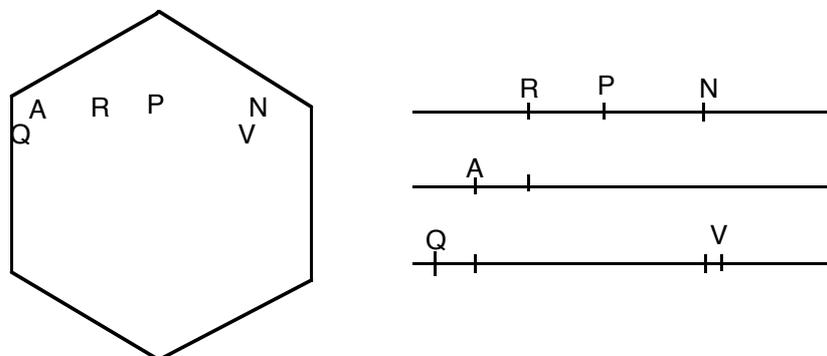


Figure 7. Pour se rendre de Quiberon à Villiers-lès-Nancy, il n'est pas nécessaire d'utiliser une carte très précise afin de déduire qu'il faut se déplacer vers l'est. Les contraintes à résoudre pour se déplacer de Quiberon à Villiers-lès-Nancy se résolvent tout d'abord en assimilant, sous une granularité grossière, Quiberon à Auray, Auray à Rennes et Villiers-lès-Nancy à Nancy. Rennes étant à l'ouest de Paris et Nancy à l'est de Paris, il va falloir se rendre de Rennes à Paris puis de Paris à Nancy. En raffinant, Quiberon dépendant ferroviairement d'Auray, il va donc falloir se rendre d'Auray à Rennes. Plus précisément, il faudra aussi se rendre de Quiberon à Auray et de Nancy à Villiers-lès-Nancy, ce qui peut nécessiter un plan d'une précision importante.

L'exemple précédent ne recouvre qu'une modification d'échelle (de type numérique). Mais la représentation granulaire de l'espace met en évidence de nombreux découpages irréguliers: ainsi en est-il des découpages administratifs français en régions, départements, cantons, communes et arrondissements qui «en principe» se décomposent en une hiérarchie d'inclusion [BUI 90]. Mais qu'advient-il si l'on y superpose les circonscriptions académiques, militaires ou téléphoniques? On y retrouve le même genre de difficultés que lors d'assemblage de cartes génomiques diverses obtenues à des résolutions différentes à l'aide de techniques différentes: même une propriété aussi capitale que le non croisement ne peut plus être garantie [GUI 93].

L'intuition introduite pour la représentation du temps devrait cependant fonctionner dans le cas de l'espace. Il faut toutefois élaborer, en fonction de la structure de la représentation considérée, les règles qui gouvernent la conversion d'une granularité vers une autre. La structure est gouvernée par les relations qu'entretiennent entre elles les entités représentées. À chaque système de relations devra correspondre des opérateurs de conversion.

7.1. Espace, espaces

Plutôt que de donner un système de représentation symbolique pour l'espace (plusieurs sont actuellement en concurrence) il faut se demander quel type de représentation permet de généraliser le travail présenté ici. Les caractéristiques de l'espace par rapport au temps sont les suivantes:

- les mouvements qui s'y passent sont différents des mouvements dans le temps;

- l'espace se décompose suivant plusieurs dimensions;
- l'espace ne définit pas facilement un ordre sur ses régions.

La première caractéristique n'a pas été prise en compte ci-dessus. Elle ne nécessitera pas d'aménagements supplémentaire. La seconde n'a aucune incidence sur la relation symbolique du temps fondée sur des critères purement topologiques (connexité). Elle a, par contre, une certaine incidence sur la représentation numérique et sa granularisation. Elle conditionne aussi la troisième en permettant d'introduire la notion d'ordre liée à des notions vectorielles. La troisième caractéristique est reliée à une structure vectorielle de l'espace (repère, direction). Cette notion d'ordre est apparente dans les relations symboliques (avant, après).

Les deux notions principales à discuter ici concernent donc les notions de dimensions (et d'interprétation des régions dans un espace à plusieurs dimensions) et la notion d'ordre.

L'interprétation usuelle de l'espace est \mathbb{R}^n . Cette interprétation s'accorde correctement avec la notion de point. Reste à interpréter la notion de région dans cet espace. Une région peut être considérée comme un ensemble de points de l'espace. En fonction de structures attribuées à cet espace, il est possible d'exprimer différentes propriétés des régions: connexité (espace topologique: $m, m^{-1} \dots$), distance (espace métrique), ordre (espace vectoriel: $b, b^{-1} \dots$).

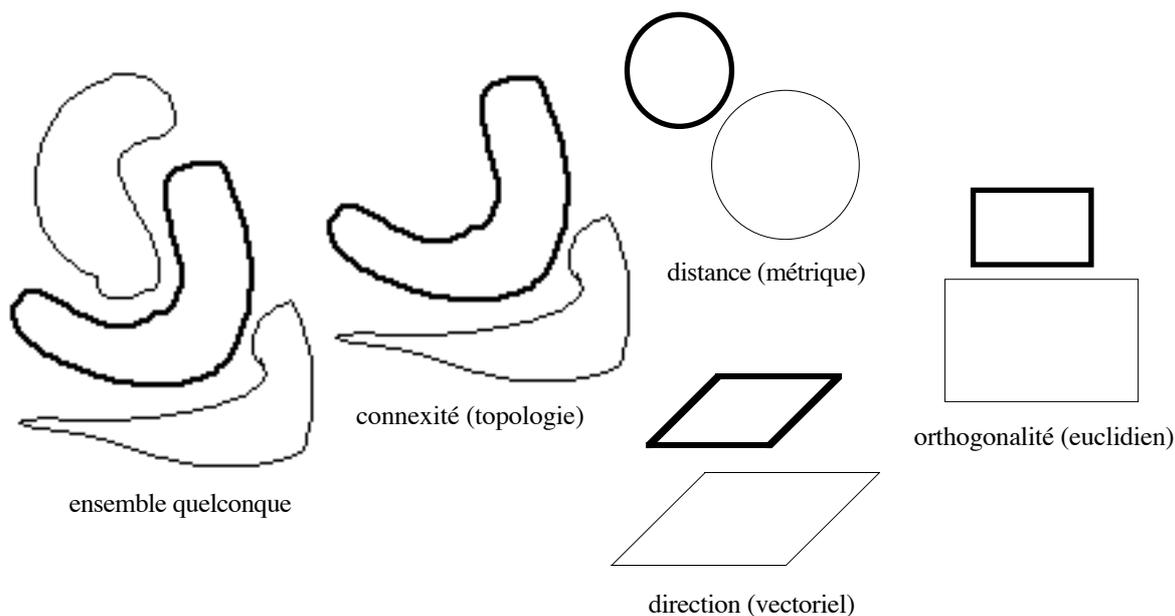


Figure 8 (inspirée de [BUI 90]). Un exemple des types de régions manipulables à l'aide des notions introduites par les différents espaces mathématiques.

Représenter les régions par des entités géométriques définies peut se faire de différentes manières: intervalles (voir plus bas), arbres 2^n -aires (généralisation en dimension n des "quadrees" ou arbres quaternaires [SAM 84]) ou simplexes [EGE 90]. Ces représentations supportent en général des opérations d'intersection, d'union, de localisation de manière efficaces et elles permettent de représenter numériquement les régions sous une forme compacte. Elles supportent assez bien la notion de granularité numérique (les quadrees par

exemple sont réputés constituer une hiérarchie de modèles de l'espace qui est alors infiniment discrétisé) car ces figures se décomposent naturellement en un assemblage de figures de même nature. Seule la notion d'intervalle entre deux points de l'espace (qui généralise la notion d'intervalle temporel) est considérée ici. Elle utilise la notion d'espace vectoriel et est développée plus longuement dans l'annexe C car elle permet simplement d'hériter les propriétés définies pour les intervalles temporels grâce à la simple notion de produit.

Cependant, une région spatiale réduite à une figure régulière n'est pas très adaptée à certaines utilisations. Son utilisation presque exclusive est celle qui permet des calculs sur la *boite englobante* d'une région ou, au contraire, la décomposition, toujours plus approchée d'une région particulière en un ensemble de régions régulières disjointes. L'intervalle est donc peu pertinent quand la dimension est supérieure à 1.

7.2. Une représentation symbolique de l'espace

Il est possible de songer à une structure plus souple pour la région en fonction des propriétés qui leur sont affectées (voir figure 9). Ces propriétés sont discutées ci-dessous avant d'aborder une représentation des relations entre régions qui s'inspire de celle des intervalles temporels en autorisant une grande variété de régions.

L'«algèbre d'intervalles» utilisée par James Allen ne prend pas en compte la dimension de l'espace et la notion d'intervalles n'est présente que dans l'interprétation qui est faite de ces deux relations (en particulier, les problèmes apparaissant dès que l'on désire s'intéresser aux bornes des intervalles ont poussé Allen à ne jamais les considérer). Cette algèbre peut être appauvrie à loisir (en considérant un sous-ensemble de relations qui groupe certaines relations entre elles, voir figure 9).

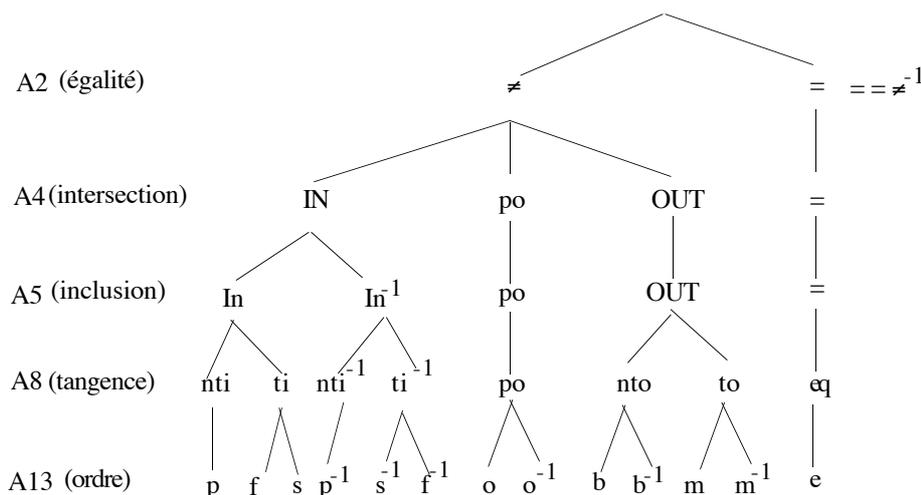


Figure 9. Hiérarchie d'algèbres d'intervalles. Toutes les relations sont leur propre réciproque sauf si mentionné (⁻¹). Il y a d'autres systèmes possibles (par exemple, ici, A₃ présenté au §2.2.1, n'est pas représenté car il est constitué à partir de A₂ et de la notion d'ordre), l'ensemble des systèmes possibles se décompose plutôt en un graphe qu'un arbre. Ainsi, en utilisant les cinq primitives utilisées ici («être égal», «avoir une intersection non vide avec», «être inclus dans»,

«être tangent avec» et «être supérieur à») et que leurs réciproques, on obtient un treillis de systèmes.

Le système présenté ici est une généralisation de l'algèbre d'intervalles temporels: l'algèbre A_8 [RAN 92a] correspond justement à un appauvrissement de A_{13} dans lequel l'ordre n'est plus pris en compte. Ainsi, b et b^{-1} , s et f , s^{-1} et f^{-1} , o et o^{-1} , m et m^{-1} qui n'étaient distingués que par la faculté d'ordonner des intervalles (ou les bornes des intervalles) peuvent-ils être réunis dans une seule relation non ordonnée (correspondant à nto , ti , ti^{-1} , po et to).

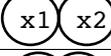
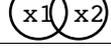
relation (r): $x1$ r $x2$	$x1/x2$	réciproque: $x2$ r ⁻¹ $x1$
est strictement distinct (nto)		nto
est tangentiellement distinct (to)		to
recouvre partiellement (po)		po
égale (eq)		eq
englobe tangentiellement (ti)		est tangentiellement englobé
englobe strictement (nti)		est strictement englobé

Table 11. Les 8 relations entre deux régions $x1$ et $x2$.

A_8 a été axiomatisée en fonction de la notion de connexion (la clôture topologique de deux régions partagent une partie commune) dans [RAN 92a] et la table de transitivité de \times_8 est introduite dans [RAN 92b]. Les régions s'interprètent comme des ensembles de points sans aucune restriction supplémentaire (en particulier, elles n'ont pas à être connexe ou convexe).

Les mêmes dispositions touchent les points entre eux (deux relations = et \neq) et les points vis-à-vis des régions (\in et \notin). Pour ces dernier, des problèmes similaires à ceux posés pour la situation par rapport aux bornes de l'intervalle (resp. à la limite ou enveloppe topologique de la région) se reproduisent [RAN 92a]; comme précédemment, ils ne sont pas pris en compte.

7.3. Circulation des représentation spatiales

Comme cela a été fait pour les intervalles temporels, la représentation spatiale granulaire peut s'interpréter sur \mathbb{N}^n et non sur \mathbb{R}^n . Cependant, de même que l'approximation de \mathbb{R} par une machine est limitée, l'approximation de \mathbb{R}^n par \mathbb{N}^n devient dramatique si des calculs de distance sont nécessaires par exemple [EGE 90]. Contrairement à beaucoup d'autres travaux, les inférences considérées ici seront beaucoup plus topologiques que métriques (voir la discussion à ce sujet dans [BUI 90]).

Quelles propriétés de la circulation entre granularités doivent être valides? Tout d'abord l'abandon de la notion d'ordre rend caduque la propriété de non-croisement (elle se retrouve dans le cas particulier des intervalles; voir annexe C). Cette propriété était très importante pour fixer les conversions. Elle peut être approchée par une propriété de conservation de la

connexité: les enveloppes convexes des régions ne peuvent pas se «croiser» — c’est-à-dire avoir une intersection non vide — lors de la montée si elles ne se croisaient pas avant. Aucune propriété (logique ou topologique) plus précise n’est donnée à l’appui de cette conception (peut-être est-elle axiomatisable en fonction de la connexité [RAN 92a]). La figure 10 en donne une illustration dans le cas de la relation «po», la plus problématique. En fait, ce raisonnement s’applique correctement aux régions connexes, mais il devient beaucoup plus périlleux lorsque les régions ne le sont plus et que certaines parties connexes de régions disparaissent complètement. Dans un tel cas, la contrainte donnée ici est trop forte; elle est cependant maintenue car elle s’applique bien à l’appauvrissement de l’algèbre d’intervalles temporels (où la notion de connexité des intervalles apparaît, dès lors, comme vitale).

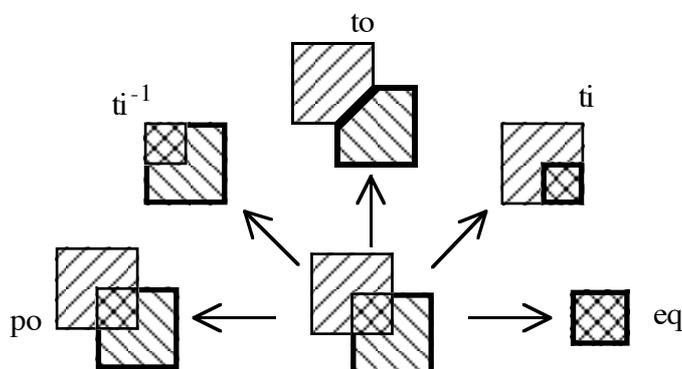


Figure 10. Les transitions autorisées lors de la conversion ascendante de deux régions si la propriété de non croisement des enveloppes est respectée.

Par contre, la transitivité cumulée, la conservation descendante et le principe de compatibilité peuvent être préservés sans difficulté.

Dans la représentation symbolique définie plus haut, les tables de montée et descente des relations peuvent être obtenue par simple abandon de l’ordre (voir tables 12, 13 et 14).

relation: r	$g \uparrow^g r$	$g \downarrow^g r$
=	=	= ≠
≠	≠ =	≠

Table 12. Conversion des relations spatiales (sans ordre) entre points.

relation: r	$g \uparrow^g r$	$g \downarrow^g r$
∈	∈	∈ ∉
∉	∉ ∈	∉

Table 13. Conversion des relations spatiales (sans ordre) entre point et région. Le problème des limites réapparaît.

relation (r): $x1 \ r \ x2$	$g \uparrow^{g'} r$	$g \downarrow^{g'} r$
nto	nto to	nto
to	to	to nto po
po	po to ti ti^{-1} eq	po
eq	eq	eq ti nti po ti^{-1} nti^{-1}
ti	ti eq	ti po nti
nti	nti eq ti	nti

Table 14. Conversion des relations spatiales (sans ordre) entre régions.

Les deux tables obéissent au principe de compatibilité et par simple construction, les deux contraintes suivantes (inclusion du converti et distributivité entre conversion et réciprocity) sont satisfaites:

$$\begin{aligned} p &\subseteq g \rightarrow_{g'} p \\ g \rightarrow_{g'} p^{-1} &= (g \rightarrow_{g'} p)^{-1} \end{aligned}$$

Par contre, il est nécessaire d'établir, pour la montée:

$$(g \uparrow^{g'} p_1) \times_8 (g \uparrow^{g'} p_2) \subseteq g \uparrow^{g'} (p_1 \times_8 p_2)$$

et pour la descente (valide pour les points et les régions):

$$g \downarrow_{g'} (p_1 \times p_2) \subseteq (g \downarrow_{g'} p_1) \times (g \downarrow_{g'} p_2).$$

L'indépendance de la représentation (régions ou points) n'est pas établie car la conversion entre les deux représentations n'est pas définie (voir annexe C pour l'établissement d'une telle correspondance). Pour la conversion des entités elles-mêmes, l'utilisation de schémas de décomposition comme les histoires — qui peuvent être qualifiés de plans (dotés d'une échelle) — sera certainement la meilleure façon d'aider la conversion par la connaissance du domaine considéré. Ces résultats peuvent être vérifiés exhaustivement (voir annexe A), mais sont prouvés axiomatiquement à partir des résultats obtenus sur A_{13} (resp. A_3 , voir annexe B). Ils sont ainsi utilisables avec d'autres appauvrissement.

Bien entendu, les représentations de l'espace représentés ici ne couvrent pas l'étendue des besoins ni des applications (vision, raisonnement dans l'espace, mouvements et trajectoires...). Mais les concepts mis en avant pour la représentation granulaire du temps semblent s'adapter, moyennement quelques aménagements, relativement bien à l'espace.

8. Autres travaux

Jerry Hobbs [HOB 85] a introduit le concept de granularité. Pour une théorie logique considérée, une granularité détermine un ensemble de prédicats intéressants sous celle-ci. Une relation de congruence est alors définie qui considère comme indiscernables sous cette granularité les termes qui ne peuvent être discriminés par ces prédicats intéressants. Cette proposition soulève plusieurs problèmes:

- Tout d’abord, il faut disposer d’une théorie initiale au plus bas niveau qui comprenne tous les termes utilisables à tous les niveaux. Cela exclut qu’une source de connaissance fournisse uniquement la connaissance pertinente à son niveau.
- Ensuite, tous les calculs doivent se faire au plus bas niveau et la représentation granulaire ne peut apporter d’avantages calculatoires.
- Enfin, la discrétisation est obtenue à partir de la possibilité de discriminer des termes à l’aide d’un ensemble de prédicats. Cependant, si le monde évolue et que la théorie courante doit aussi évoluer, il faudra alors faire évoluer la discrétisation des termes.

Ces trois problèmes, sont liés à la volonté de définir une granularité a posteriori (en fonction des prédicats intéressants). Cette proposition a cependant l’avantage de ne pas imposer une représentation a priori et d’induire la représentation du temps en fonction de l’intérêt que va lui porter celui qui en a besoin. La représentation du temps est donc relative. Le présent travail s’est focalisé sur la granularité a priori (telle que Jerry Hobbs l’a proposée pour les mesures de températures) tout en réutilisant des résultats partiels de [HOB 85] signalés dans le cours du texte.

Patrick Hayes et James Allen [HAY 87] ont donné une axiomatisation des intervalles temporels en fonction de la relation «termine au début» (“meets”). Ils y introduisent les instants comme les endroits où les intervalles se rencontrent et les moments comme des intervalles indivisibles. Afin de disposer des instants dans la théorie, les moments sont associés aux instants qui les terminent. Le résultat remarquable de ce travail est que l’axiomatisation est la même après un changement de granularité (un changement dans la définition d’indivisible). Ainsi, comme présenté plus haut, la présence de la granularité n’affecte pas les représentations classiques du temps. Aucun résultat n’est donné, par contre, sur les rapports entre les changements de granularité et la propagation de contraintes. Par ailleurs, ce système ne prend pas en compte les aspects numériques.

Cependant, afin de préserver la transitivité de la relation de congruence sans tomber dans le travers évoqué au §4.2 où tous les instants sont congrus au même instant, les auteurs sont obligés de poser une hypothèse très restrictive (en particulier vis-à-vis des changements de granularité successifs): deux moments ne peuvent se rencontrer. À l’opposé, notre attitude lors de la montée est plus proche de celle préconisée par Jerry Hobbs, à savoir découper des parties de la «droite temporelle» dont tous les points vont être congrus au même représentant. Par ailleurs, un intervalle ne peut jamais disparaître lors du changement de granularité (même s’il devient un moment). Il n’est donc pas possible d’utiliser cette axiomatisation pour fonder les opérations de montée et de descente présentées ici: elles ne respectent pas cette propriété.

Enfin, il faut noter que si ces travaux concernent la montée, aucun ne s’est jamais préoccupé de la descente.

Françoise Gayral et Philippe Grandemange [GAY 91] ont abordé la nécessité de considérer une même entité temporelle à la fois sous un aspect duratif et un aspect instantané. Leur travail est motivé par la compréhension de texte. Un mécanisme de montée/descente d'entités temporelles est introduit et modélisé dans un cadre logique. Il ne prend en compte que les contraintes symboliques et ne convertit que les entités et non les relations. Cette représentation s'appuie sur la notion de composition qui permet de décomposer successivement les débuts et fins d'intervalles en nouveaux intervalles: c'est une notion réduite d'histoire. Le niveau de granularité est déterminé par l'élection d'un «individu distingué» parmi l'ensemble des entités considérées et le fait qu'il soit considéré comme duratif ou instantané. Ce travail est donc principalement *relatif*, c'est-à-dire que la granularité courante est relative à la façon de considérer (comme duratif ou instantané) un évènement particulier alors que la conception présentée ici est *absolue* car elle concerne la granularité de manière transversale à toute une base de connaissance. La liaison entre les deux notions est envisageable au travers de la prise en compte de la relation de décomposition des entités temporelles dans le modèle proposé ici, c'est-à-dire en prenant en compte de manière plus générale la notion d'histoire.

Indépendamment du travail présenté ici, Angelo Montanari, Enrico Maim, Emanuele Ciapessoni et Elena Ratto [MON 92] proposent un cadre semblable pour la représentation de la granularité temporelle. Celle-ci est, au contraire de celle présentée aux paragraphes précédents, essentiellement numérique et se fonde sur un modèle du temps très hiérarchisé. Les contraintes symboliques n'y sont pas considérées. L'univers temporel est un ensemble de modèles du temps ordonnés du plus grossier au plus fin $T_1 > \dots > T_n$ où les T_i sont des univers temporels discrets, à l'exception de T_n qui peut être dense. Pour chaque paire de domaines T_i, T_{i+1} , il existe une application qui associe à chaque instant I de T_i un intervalle $\langle I \rangle$ de T_{i+1} tel que:
(contiguïté) à chaque paire d'instant «contigus» est associée une paire d'intervalles contigus
(relations m, m^{-1}).

(préservation de l'ordre) qui correspond à la contrainte de non croisement évoquée ici.

(couverture) l'union des intervalles de l'image de T_i couvre tout T_{i+1} .

(homogénéité) la longueur ($d_{i,i+1}$) des intervalles images d'instant par l'application est constante.

Cette application se généralise en une application d'un domaine grossier quelconque vers un domaine plus fin correspondant à l'opération de descente. Du fait de toutes ces restrictions, le travail présenté ici est plus général mais les propriétés obtenues sont moins favorables. Les travaux plus récent de la même équipe permettent de proposer encore plus de restrictions sur cette application afin d'obtenir des comportements temporels plus précis [CIA 93b] mais encore de prendre en compte des granularités ordonnées uniquement par un ordre partiel [CIA 93a].

Les auteurs proposent également des opérateurs de montée et de descente. La montée naïve est similaire à l'opérateur présenté ici, elle préserve l'ordre mais pas la différence entre deux

entités. La descente correspond à la descente présentée ci-dessus mais un certain nombre de contraintes sont imposées afin que des assertions contradictoires et contiguës ne soient pas valides simultanément dans l'intervalle image de leur point de contact par la descente. Pour cela, les instants de terminaison et de commencement de ces assertions sont représentés sous le grain le plus fin par des instants ordonnés distincts des bornes de l'intervalle image. Cela est réalisé à l'aide de la notion de *macro-événements* (similaires aux histoires), introduite par Chris Evans, qui permet de représenter la descente. Il faut noter que ces macro-événements étant définis en fonction des assertions exprimées dans la base, ils relèvent d'une conception a posteriori de la granularité. Cependant, s'ils sont dépendants du type d'événements, ou encore, exprimés comme des histoires, alors ils peuvent être considérés comme donnés a priori. Le problème de la confusion de deux expressions temporelles lors de la montée a été aussi résolu de cette façon: en considérant que deux expressions temporelles qui se trouveraient confondues lors de la montée sont en fait des épisodes d'une même histoire qui doit donc les remplacer (toutes les deux) au niveau supérieur.

Sous l'aspect implémentation, Thomas Dean [DEA 89] présente la notion de *bassins* ("buckets"): un ensemble de données temporelles discriminées suivant une série de conditions. Ils sont utilisés en particulier dans les *schémas de partition hiérarchique* pour discriminer suivant la position dans une partition du temps homogène définie a priori (l'exemple donné est la partition en mois, jours, heures, minutes et secondes). Les bassins fonctionnent en quelque sorte comme les arbres quaternaires pour l'information spatiale, ils se décomposent au fur et à mesure qu'ils contiennent plus d'éléments. Cette organisation, bien que fondée sur une décomposition du temps en unités de même taille, est assez différente de celle préconisée par la granularité: un intervalle d'une durée de la minute peut se trouver stocké au niveau du siècle pour peu qu'il se passe au changement de siècle. L'organisation est duale de la représentation granulaire: la première organise les données suivant leur position dans le temps alors que la seconde les organise suivant leur taille. Johannes Koomen [KOO 89] a montré que les intervalles de référence [ALL 83] rendent des résultats incomplets s'ils sont utilisés rigidement et a proposé de maintenir automatiquement une organisation hiérarchique des intervalles de référence. Cette proposition correspond aux schémas de partition hiérarchique, mais organise les bassins en fonction de leur contenance et non plus de leur position.

Il faut, par ailleurs, signaler les travaux de Catherine Joubel et Olivier Raiman [JOU 90], orthogonaux à ceux développés ici. Au lieu de considérer l'influence de la granularité sur le temps comme cela a été fait ici, ils évaluent celle du temps sur le contexte de raisonnement. Le temps ne fait donc pas partie des données à représenter mais détermine le point de vue.

9. Conclusion

L'utilisation d'informations temporelles sous divers niveaux de détail a conduit à mettre en avant la notion de granularité de la représentation temporelle. Celle-ci permet de limiter sous un point de vue la puissance de la représentation temporelle à la taille du plus petit évènement pertinent.

La représentation temporelle granulaire présentée se diffuse sur deux axes:

- la représentation des expressions temporelles sous une granularité précise;
- la conversion des expressions temporelles d'une granularité vers une autre.

Sur le premier axe, la représentation proposée permet de conserver les représentations temporelles symboliques classiques: l'appareil complet des représentations symboliques est disponible sous chacune des granularités. Cependant l'échelle utilisée permet de considérer le temps comme congru non plus à \mathbb{R} mais à \mathbb{N} , ce qui conduit à limiter la complexité des opérations sur la représentation. Par ailleurs, le fait que, suivant la granularité, une information temporelle puisse durer ou non mène à l'identification des concepts d'instant et d'intervalle.

Les règles de conversion sont compatibles avec les représentations temporelles sur chacun des niveaux. En particulier, la conversion entre intervalles et instants se retrouve à tous les niveaux de granularité. Du côté numérique, les règles de conversion définies remplissent certaines des conditions escomptées (non croisement d'entités, compatibilité ascendante). Des restrictions sur le modèle général proposé ont été avancées afin d'obtenir certaines propriétés additionnelles. Ainsi, pour disposer de la propriété de transitivité cumulée, lors de la montée, il faut utiliser des contraintes sur l'ensemble des grains disponibles.

Les apports de la représentation temporelle granulaire sont les suivants:

- La connaissance peut être introduite au niveau de détail le plus précis où elle est disponible et exploitée de manière consistante sur les autres niveaux de détail.
- D'autre part, la granularité permet de ne considérer que les entités temporelles présentes à un niveau de détail et d'éliminer les autres. Ceci est très intéressant lorsqu'une information est recherchée d'une manière volontariste: il est possible de restreindre la recherche à un certaine granularité, puis de l'étendre à d'autres granularités si la première n'est pas suffisante.

Il semble que ce travail sur la granularité temporelle puisse être considérée comme un cas particulier de la granularité dans un espace de dimension quelconque finie.

L'imprécision apparente introduite lors de la propagation des contraintes symboliques entre les granularités est nécessaire à la compatibilité entre information symbolique et numérique (elle est le reflet du souci de laisser la porte ouverte à toutes les interprétations des expressions

temporelles manipulées). Elle nécessite l'utilisation systématique de procédures de propagation de contraintes symboliques déduisant automatiquement les relations les plus précises possibles entre entités temporelles. La réduction de l'imprécision introduite par la conversion peut être obtenue en ajoutant de la précision, c'est-à-dire de la connaissance supplémentaire. Celle-ci peut provenir de différentes sources:

- Des contraintes générales imposées à la structure de la représentation granulaire ([MON 92, CIA 93b]).
- De la connaissance spécifique à l'entité temporelle manipulée ajoutée par l'utilisateur (encore faut-il qu'il en dispose, auquel cas il est naturel qu'il l'exprime).
- De la connaissance générique liée au type d'entités manipulées par l'application tel que les macro-événements ou les histoires (voir §6.2).

Remerciements

Philippe Kirsch et Jean-Marc Pugin participaient à la discussion au cours de laquelle les premières idées sur la représentation granulaire ont éclosées. Les nombreuses discussions serrées avec Patrice Uvietta, Johannes Stein, Pierre Girard et Danielle Ziébelin des précédentes versions de ce papier ont grandement participé à sa maturation. Enfin, les lecteurs de la «revue d'intelligence artificielle» ont, par leurs suggestions judicieuses, contribué à la bonne formulation de ce travail

Références

- [ALL 81] James ALLEN, «An interval-based representation of temporal knowledge», Actes 7th IJCAI, Vancouver (CA), pp221-226, 1981
- [ALL 83] James ALLEN, «Maintaining knowledge about temporal intervals», *Communication of the ACM* 26-XI, pp832-843 (rep. dans Ronald Brachman, Hector Levesque (éds.), *Readings in knowledge representation*, Morgan Kaufmann, Los Altos (CA US), pp509-521, 1985), 1983
- [BAR 70] Marc BARBUT, Bernard MONJARDET, *Ordre et classification: algèbre et combinatoire (tome 2)*, Hachette, Paris (FR), 1970
- [BES 89] Hélène BESTOUGEFF, Gérard LIGOZAT, *Outils logiques pour le traitement du temps: de la linguistique à l'intelligence artificielle*, Masson, Paris (FR), 1989
- [BON 88] Eric BONTÉ, Jacqueline CASTAING, Philippe GRANDEMANGE, Stéphane GRUMBACH, Daniel KAYSER, François LÉVY, «Description succincte d'un raisonneur à profondeur variable», Actes 8ièmes journées sur les systèmes experts et leurs applications, Avignon (FR), pp117-132, 1988
- [BUI 90] Laurent BUISSON, *Le raisonnement spatial dans les systèmes à base de connaissances: application à l'analyse de sites avalanches*, Thèse, Université Joseph-Fourier, Grenoble (FR), 1990
- [CIA 93a] Emanuele CIAPESSONI, Edoardo CORSETTI, Angelo MONTANARI, P. SAN PIETRO, «Embedding time granularity in a logical specification language for

- synchronous real-time systems», *Science of computer programming* 20-I, pp141-171, 1993
- [CIA 93b] Emanuele CIAPESSONI, Edoardo CORSETTI, Manlio MIGLIORATI, Elena RATTO, «Logical specification of real-time granular systems in an object-oriented language», Actes 13th IJCAI, Chambéry (FR), pp881-886, 1993
- [DEA 87] Thomas DEAN, Drew MAC DERMOTT, «Temporal data base management», *Artificial intelligence* 32-I, pp1-55, 1987
- [DEA 89] Thomas DEAN, «Using temporal hierarchies to efficiently maintain large temporal databases», *Journal of the ACM* 36-IV, pp687-718, 1989
- [EGE 90] Max EGENHOFER, Andrew FRANK, Jeffrey JACKSON, «A topological model for spatial databases», *Lecture notes on computer science* 409 (Alejandro Bachmann, Oliver Günther, Terence Smith, Yuan-F. Wang (éds.), actes Symposium on design and implementation of very large spatial data bases, Santa-Barbara (CA US), 1989), pp325-344, 1990
- [EUZ 93] Jérôme EUZENAT, «Représentation granulaire du temps», *Revue d'intelligence artificielle* 7-III, pp329-361, 1993
- [FRE 93] Christian FREKSA, «Temporal reasoning based on semi-intervals», *Artificial intelligence* 54-I, pp199-227, 1992
- [GAY 91] Françoise GAYRAL, Philippe GRANDEMANGE, «Événements: ponctualité et durativité», Actes 8ième RFIA, Villeurbanne (FR), pp905-910, 1991
- [GHA 89] Malik GHALLAB, Amine MOUNIR-ALAOUI «Relations temporelles symboliques: représentations et algorithmes», *Revue d'intelligence artificielle* 3-III, 67-115, 1989
- [GUI 93] John GUIDI, Thomas RODERICK, «Inference of order in genetic systems», Actes 1st international conference on intelligent systems for molecular biology, Bethesda (MD US), pp163-171, 1993
- [HAJ 89] Elzbieta HAJNICZ, «Absolute date and relative dates in an inferential system on temporal dependencies between events», *International journal of man-machine studies* 30, pp537-449, 1989
- [HAY 87] Patrick HAYES, James ALLEN, «Short time periods», Actes 10th IJCAI, Milan (IT), pp981-983, 1987
- [HOB 85] Jerry HOBBS, «Granularity», Actes 9th IJCAI, Los Angeles (CA US), pp432-435, 1985
- [JOU 90] Catherine JOUBEL, Olivier RAIMAN, «How time changes assumptions», Actes 10ièmes journées internationales sur les systèmes experts et leurs applications, Avignon (FR), pp197-208, 1990 & actes 9th ECAI, Stockholm (SE), pp378-383, 1990
- [KOO 89] Johannes KOOMEN, «Localizing temporal constraint propagation», Actes 1st KR, Toronto (CA), pp198-202, 1989
- [LER 93] Xavier LEROY, Pierre WEIS, *Manuel de référence du langage CAML*, InterÉditions, Paris (FR), 1993
- [MCC 69] John MAC CARTHY, Patrick HAYES, «Some philosophical problems from the standpoint in artificial intelligence», *Machine intelligence* 4, pp463-502, 1969

- [MCD 81] Drew MAC DERMOTT, «A temporal logic for reasoning about processes and plans», Rapport de recherche 196, Yale university, New-Heaven (CT US) (rep. *Cognitive Science* 6, pp101-155, 1982), 1981
- [MAR 90] Olga MARIÑO, François RECHENMANN, Patrice UVIETTA, «Multiple perspectives and classification mechanism in object-oriented representation», Actes 9th ECAI, Stockholm (SE), pp425-430, 1990
- [MAR 93] Olga MARIÑO, *Raisonnement classificatoire dans une représentation à objets multi-points de vue*, Thèse, Université Joseph-Fourier, Grenoble (FR), 1993
- [MAU 91] Michel MAUNY, «Functional programming using CAML», Rapport technique 129, INRIA, Rocquencourt (FR), 1991
- [MON 92] Angelo MONTANARI, Enrico MAIM, Emanuele CIAPESSONI, Elena RATTO, «Dealing with time and granularity in the event calculus», Actes 4th FGCS, Tokyo (JP), pp702-712, 1992
- [RAN 92a] David RANDELL, Zhan CUI, Anthony COHN, «A spatial logic based on regions and connection», Actes 3rd KR, Cambridge (MA US), pp165-176, 1992
- [RAN 92b] David RANDELL, Zhan CUI, Anthony COHN, «Computing transitivity tables: a challenge for automated theorem provers», *Lecture notes in computer science (lecture notes in artificial intelligence)* 607 (proc. 11th CADE, Saratoga Springs (NY US), 1992), pp786-790, 1992
- [RIT 88] Jean-François RIT, *Modélisation et propagation de contraintes temporelles pour la planification*, Thèse, Institut National Polytechnique, Grenoble (FR), 1988
- [SAM 86] Hanan SAMET, «The quadtree and related hierarchical data structures», *ACM computing surveys* 16(2):187-260, 1986
- [SCH 82] Roger SCHANK, *Dynamic memory, a theory of reminding and learning in computers and people*, Cambridge university press, Cambridge (GB), 1982
- [SCH 94] Olivier SCHMELTZER, Frank DORKELD, «Modélisation de cartes génomiques», Rapport non publié, INRIA Rhône-Alpes, Grenoble (FR), 1994
- [SHO 86] Yoav SHOHAM, *Reasoning about change: time and causation from the standpoint of artificial intelligence*, Thèse, Yale university, New-Heaven (CT US) (rev. The MIT press, Cambridge (MA US), 1988), 1986
- [STE 91] Johannes STEIN, «Entwicklung eines Zeitmodells mit der Fähigkeit zur Variation der Granularität und dessen Implementierung im Repräsentationswerkzeug TROPES», Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern (DE), 1991
- [VAN 89] Peter VAN BEEK, «Approximation algorithms for temporal reasoning», Actes 11th IJCAI, Detroit (MI US), pp1291-1296, 1989
- [VIL 86] Marc VILAIN, Henry KAUTZ, «Constraint propagation algorithms for temporal reasoning», Actes 5th AAI, Philadelphia (PA US), pp377-479, 1986
- [WEI 93] Pierre WEIS, Xavier LEROY, *Le langage CAML: introduction à la programmation*, InterÉditions, Paris (FR), 1993

Annexe A. Programme de vérification des résultats énoncés pour les algèbres de relations A_{13} , A_8 , A_3 et A_2

Toutes les propriétés énoncées ci-dessus ont été vérifiées exhaustivement. Afin de réduire le travail du programme, la propriété suivante (si deux fonctions quasi-commutent — l'ordre d'utilisation des deux opérateurs donne des résultats en relation d'inclusion — sur tout singleton, sous-ensemble d'un domaine précis, alors elles quasi-commutent sur tout sous-ensemble non-vide du domaine) est utilisée:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \emptyset, f_1(f_2(x)) \subseteq f_2(f_1(x)) \\ \Rightarrow & \forall E \subseteq \emptyset, \bigcup_{x \in E} f_1(f_2(x)) \subseteq \bigcup_{x \in E} f_2(f_1(x)) \end{aligned}$$

Ce qui s'étend à $f_1(f_2(E)) = f_2(f_1(E))$ en inversant les rôles de f_1 et f_2 . Par conséquent, il suffit de montrer que deux opérations quasi-commutent sur tous les singletons pour montrer qu'elles quasi-commutent sur tous les sous-ensembles non vide d'un domaine particulier. C'est ce qui est réalisé ici.

Le programme qui suit, écrit en CAML [MAU 91, LER 93, WEI 93], vérifie chacune de ces propriétés. Ce programme fonctionne avec les systèmes Caml 2.6-1 et Caml Light 0.6. Il nécessite la définition des primitives ensemblistes suivantes: `set_mapunion` (\sqcup), `set_product` (\times), `set_eq` ($=$), `set_incl` (\supseteq), `set_is_incl` (\subseteq), et `set_uniq` (qui supprime les doublons dans les listes).

Propriétés de la représentation temporelle symbolique (A_{13} et A_3)

La relation «o» est représentée par `ov` car `o` est l'opérateur de composition de fonctions en ML. Les parties du texte qui suivent en *courrier* constituent le programme; les commentaires en police courante sont l'interprétation de chaque programme.

```
(* ----- *)
(* timesys.ml *)

(* Table 1,  $A_3 = \{<, =, >\}$  *)
type instrel = sup | equ | inf;;
let A3 = [sup;equ;inf];;

(*  $\forall x \in A_3, x^{-1} = \text{inv\_inst}(x)$  *)
let inv_inst = function sup -> inf | equ -> equ | inf -> sup;;

(* Table 2,  $\forall (x,y) \in A_3 \times A_3, x \times_3 y = X\_inst(x,y)$  *)
let X_inst = function sup,inf -> A3 | sup,_ -> [sup]
              | equ,x -> [x]
              | inf,sup -> A3 | inf,_ -> [inf];;
```

```
(* Table 3,  $A_{13} = \{b, d, o, s, f, m, e, m^{-1}, f^1, s^{-1}, o^{-1}, d^1, b^{-1}\}$  *)
type intrel = b | d | ov | s | f | m | e | mi | fi | si | oi | di | bi;;
let A13 = [b;d;ov;s;f;m;e;mi;fi;si;oi;di;bi];;

(*  $\forall x \in A_{13}, x^{-1} = \text{inv\_int}(x)$  *)
let inv_int = function e -> e
  | b -> bi | d -> di | ov -> oi | s -> si | f -> fi | m -> mi
  | mi -> m | fi -> f | si -> s | oi -> ov | di -> d | bi -> b;;

(* Table de transitivité [ALL 83],  $\forall (x,y) \in I_{13} \times I_{13}, x \times_{13} y = x\_int(x,y)$ ,
   utilise la propriété  $x \times_{13} y = (y^{-1} \times_{13} x^{-1})^{-1}$  *)
let rec X_int = function
  e,x -> [x]
  | s,s -> [s]
  | f,f -> [f]
  | ov,s | fi,ov | fi,s -> [ov]
  | b,fi | b,ov | b,s | b,m | b,si | d,b | m,b | s,m | m,m | m,ov | d,m
  | m,di | ov,b | ov,m | fi,b | b,di | m,fi | b,b | s,b | f,b -> [b]
  | d,d | d,s | d,f | s,f | f,s | s,d | f,d -> [d]
  | m,s | m,si | fi,m | f,m -> [m]
  | s,oi | oi,d | oi,s | mi,d | mi,ov | mi,s | si,d -> [oi;d;f]
  | ov,ov | ov,fi | s,ov | s,fi -> [b;ov;m]
  | m,d | m,f | m,oi | ov,d | ov,f | f,ov | fi,d -> [ov;d;s]
  | m,mi | f,fi | fi,f -> [f;fi;e]
  | s,si | mi,m | si,s -> [s;e;si]
  | ov,di | s,di | di,b | oi,b | mi,b | si,b -> [b;ov;m;di;fi]
  | b,d | b,f | b,oi | b,mi | d,ov | d,fi -> [b;ov;m;d;s]
  | ov,oi | di,d | oi,ov -> [ov;oi;d;di;s;si;f;fi;e]
  | b,bi | d,di | bi,b -> A13
  | x,y -> map inv_int (X_int ((inv_int y),(inv_int x)));;

(* Table 4 : Conversion intervalles en instants repre'sente's par
   des vecteurs de 4 e'le'ments d1.d2 d1.f2 f1.d2 f1.f2,
    $\forall x \in A_{13}, \Rightarrow x = \text{int\_to\_inst}(x)$  *)

let int_to_inst = function
  b -> inf, inf, inf, inf | bi -> sup, sup, sup, sup
  | d -> sup, inf, sup, inf | di -> inf, inf, sup, sup
  | ov -> inf, inf, sup, inf | oi -> sup, inf, sup, sup
  | s -> equ, inf, sup, inf | si -> equ, inf, sup, sup
  | f -> sup, inf, sup, equ | fi -> inf, inf, sup, equ
  | m -> inf, inf, equ, inf | mi -> sup, equ, sup, sup
  | e -> equ, inf, sup, equ;;

(* Conversion vecteurs d'intervalles en instants,
    $\forall x \in A_3 \times A_3 \times A_3 \times A_3, \Leftarrow x = \text{inst\_to\_int}(x)$  *)
exception Not_interval;;

let inst_to_int = function
  inf, inf, inf, inf -> b | sup, sup, sup, sup -> bi
  | sup, inf, sup, inf -> d | inf, inf, sup, sup -> di
  | inf, inf, sup, inf -> ov | sup, inf, sup, sup -> oi
  | equ, inf, sup, inf -> s | equ, inf, sup, sup -> si
  | sup, inf, sup, equ -> f | inf, inf, sup, equ -> fi
  | inf, inf, equ, inf -> m | sup, equ, sup, sup -> mi
  | equ, inf, sup, equ -> e | _,_,_,_ -> raise Not_interval;;
```

```

(* ----- *)
(* tegcirc.ml *)

(* Operateurs de montee et de descente *)

(* Table 6,  $\forall x \in A_3, \uparrow x = \text{montee\_inst}(x)$  *)
let montee_inst =
  function sup -> [sup;equ] | inf -> [inf;equ] | equ -> [equ];;

(* Table 7,  $\forall x \in A_{13}, \uparrow x = \text{montee\_int}(x)$  *)
let montee_int = function e -> [e]
  | b -> [b;m]          | bi -> [bi;mi]
  | m -> [m]           | mi -> [mi]
  | ov -> [ov;fi;s;m;e] | oi -> [oi;si;f;mi;e]
  | d -> [d;f;s;e]     | di -> [di;si;fi;e]
  | s -> [s;e]         | si -> [si;e]
  | f -> [f;e]         | fi -> [fi;e];;

(* Table 8,  $\forall x \in A_3, \downarrow x = \text{descente\_inst}(x)$  *)
let descente_inst = function sup -> [sup] | equ -> I3 | inf -> [inf];;

(* Table 9,  $\forall x \in A_{13}, \downarrow x = \text{descente\_int}(x)$  *)
let descente_int = function e -> [ov;fi;di;s;e;si;d;f;oi]
  | b -> [b]          | bi -> [bi]
  | m -> [b;m;ov]     | mi -> [bi;mi;oi]
  | ov -> [ov]        | oi -> [oi]
  | d -> [d]          | di -> [di]
  | s -> [ov;s;d]     | si -> [oi;si;di]
  | f -> [d;f;oi]    | fi -> [di;fi;ov];;

(* ----- *)
(* tegtest.ml *)

(*Extension des fonction sur des relations aux ensembles de relations*)

(*  $\forall \rho_1 \subseteq \Gamma, \forall \rho_2 \subseteq \Gamma, \rho_1 \times \rho_2 = \text{transit\_star}(\times_{\Gamma} \rho_1 \rho_2)$  *)
let transit_star tab relset1 relset2 =
  set_mapunion tab (set_product relset1 relset2);;

(*  $\forall \rho \subseteq \Gamma, \rightarrow \rho = \text{convert\_star}(\rightarrow \rho)$  *)
let convert_star tab relset = set_mapunion tab relset;;

(*Application de la conversion à un vecteur de relations entre instants
 $\forall \langle r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle \in \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma, \rightarrow r_1 \times \rightarrow r_2 \times \rightarrow r_3 \times \rightarrow r_4 = \text{convert\_vect}(\rightarrow r_1, r_2, r_3, r_4)$  *)
let convert_vect tab (w,x,y,z) =
  set_uniq
  (map (function (w,(x,(y,z))) -> w,x,y,z)
    (set_product (tab w)
      (set_product (tab x) (set_product (tab y) (tab z)))));;

(* Fonction permettant de tester les équations du type
 $\forall x \in \mathbb{D}, P(f_1(x), f_2(x)) \equiv \text{test}(P f_1 f_2 \mathbb{D})$  *)
exception False;;

let test pred f1 f2 set =
  try do_list (function x -> if not (pred (f1 x) (f2 x))
    then raise False)
    set;
  true
with False -> false;;

```

```
(* Test de distributivité d'un opérateur de conversion et d'une table
de transitivité:
 $\forall(x,y) \in \Gamma \times \Gamma, P(\rightarrow x \times \Gamma \rightarrow y, \rightarrow(x \times \Gamma y)) \equiv \text{distrib\_convert\_transit}(P \rightarrow \times \Gamma \Gamma) *$ 
let distrib_convert_transit testfn convert transit support =
  let f1 (r1,r2) = transit_star transit (convert r1) (convert r2)
  and f2 r1xr2 = convert_star convert (transit r1xr2)
  in test testfn f1 f2 (set_product support support);;

(* Test de commutativité d'un opérateur de conversion et d'un
opérateur d'inversion
 $\forall x \in \Gamma, P(\rightarrow x^{-1}, (\rightarrow x)^{-1}) \equiv \text{commut\_convert\_inv}(P \rightarrow^{-1} \Gamma) *$ 
let commut_convert_inv testfn convert inv support =
  let f1 rel = convert (inv rel)
  and f2 rel = map inv (convert rel)
  in test testfn f1 f2 support;;

(* Test d'indépendance de la représentation
 $\forall x \in \Gamma, P(\rightarrow x, \Leftarrow \Rightarrow x) \equiv \text{commut\_convert\_inv}(P \rightarrow \Rightarrow \Gamma) *$ 
let commut_convert_repr testfn convert_int convert_inst support =
  let f2 rel = map_intervals inst_to_int
    (convert_vect convert_inst (int_to_inst rel))
  where rec map_intervals oper = function [] -> []
    | x::l -> let resl = map_intervals oper l
    in try (oper x)::resl
    with Not_interval -> resl
  in test testfn convert_int f2 support;;
```

Le test de chacune des propriétés donne les résultats suivants:

```
#commut_convert_inv set_equal montee_inst inv_inst A3;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_3, \uparrow r^{-1} = (\uparrow r)^{-1} *$ )
#distrib_convert_transit set_equal montee_inst X_inst A3;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_3 \times A_3, \uparrow r_1 \times_3 \uparrow r_2 = \uparrow (r_1 \times_3 r_2) *$ )
#commut_convert_inv set_equal montee_int inv_int A13;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_{13}, \uparrow r^{-1} = (\uparrow r)^{-1} *$ )
#distrib_convert_transit set_equal montee_int X_int A13;;
- : bool = false (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_{13} \times A_{13}, \uparrow r_1 \times_{13} \uparrow r_2 \neq \uparrow (r_1 \times_{13} r_2) *$ )
#distrib_convert_transit set_is_incl montee_int X_int A13;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_{13} \times A_{13}, \uparrow r_1 \times_{13} \uparrow r_2 \subseteq \uparrow (r_1 \times_{13} r_2) *$ )
#commut_convert_repr set_equal montee_int montee_inst A13;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_{13}, \uparrow x = \Leftarrow \Rightarrow r *$ )
#commut_convert_inv set_equal descente_inst inv_inst A3;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_3, \downarrow r^{-1} = (\downarrow r)^{-1} *$ )
#distrib_convert_transit set_incl descente_inst X_inst A3;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_3 \times A_3, \downarrow r_1 \times_3 \downarrow r_2 \supseteq \downarrow (r_1 \times_3 r_2) *$ )
#commut_convert_inv set_equal descente_int inv_int A13;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_{13}, \downarrow r^{-1} = (\downarrow r)^{-1} *$ )
#distrib_convert_transit set_equal descente_int X_int A13;;
- : bool = false (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_{13} \times A_{13}, \downarrow r_1 \times_{13} \downarrow r_2 \neq \downarrow (r_1 \times_{13} r_2) *$ )
#distrib_convert_transit set_incl descente_int X_int A13;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_{13} \times A_{13}, \downarrow r_1 \times_{13} \downarrow r_2 \supseteq \downarrow (r_1 \times_{13} r_2) *$ )
#commut_convert_repr set_equal descente_int descente_inst A13;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_{13}, \downarrow r = \Leftarrow \Rightarrow r *$ )
```

Propriétés de la représentation spatiale symbolique (A_8 et A_2)

Ici, la relation «to» est représentée par le symbole tou car to est un mot-clé du langage ML.

```
(* ----- *)
(* spacsys.ml *)

(*  $A_2 = \{=, \neq\}$  *)
type ptrel = egal | diff;;
let A2 = [egal;diff];;

(*  $\forall x \in A_2, x^{-1} = \text{inv\_pt}(x)$  *)
let inv_pt = function x -> x;;

(*  $\forall (x,y) \in A_2 \times A_2, x \times_2 y = X\_pt(x,y)$  *)
let X_pt = function egal,egal -> [egal] | diff,diff -> A2 | _,_ -> [diff];;

(* Table 11,  $A_8 = \{nto, to, ov, e, ti, nti, tii, ntii\}$  *)
type sprel = nto|tou|po|eq|ti|nti|tii|ntii;;
let A8 = [nto;tou;po;eq;ti;nti;tii;ntii];;

(*  $\forall x \in A_8, x^{-1} = \text{inv\_sp}(x)$  *)
let inv_sp = function
  nti -> ntii | ntii -> nti | ti -> tii | tii -> ti
  | x -> x;;

(* Table de transitivité [RAN 92b],  $\forall (x,y) \in A_8 \times A_8, x \times_8 y = X\_sp(x,y)$ ,
  utilise la propriété  $x \times_8 y = (y^{-1} \times_8 x^{-1})^{-1}$  *)
let X_sp = function
  eq,x -> [x]
  | x,eq -> [x]
  | ti,nto | nti,nto | nti,tou | nto,tii | nto,ntii | tou,ntii -> [nto]
  | nti,ti | ti,nti | nti,nti -> [nti]
  | ntii,tii | tii,ntii | ntii,ntii -> [ntii]
  | ti,ti -> [ti;nti]
  | tii,tii -> [tii;ntii]
  | ti,tou | tou,tii -> [nto;tou]
  | ntii,tou | tii,po | ntii,po -> [po;tii;ntii]
  | po,ti | tou,nti | po,nti | tii,nti -> [po;ti;nti]
  | ntii,ti -> [po;tii;ntii]
  | tii,tou -> [tou;po;tii;ntii]
  | tou,ti -> [tou;po;nti;ti]
  | tii,ti -> [po;ti;tii;eq]
  | nto,tou | nto,po | tou,po | ti,po | nti,po | nto,ti | nti,tii
  | nto,nti -> [nto;tou;po;ti;nti]
  | tou,nto | po,nto | tii,nto | ntii,nto | po,tou | po,tii | po,ntii
  | ti,ntii -> [nto;tou;po;tii;ntii]
  | tou,tou | ti,tii -> [nto;tou;po;ti;tii;eq]
  | ntii,nti -> [po;ti;nti;tii;ntii;eq]
  | nto,nto | po,po | nti,ntii -> A8;;
```

```

(* ----- *)
(* spgcirc.ml *)

(* Operateurs de montee et de descente *)

(* Table 12,  $\forall x \in A_2, \uparrow x = \text{montee\_pt}(x)$  *)
let montee_pt = fonction egal -> [egal] | diff -> A2;;

(* Table 14,  $\forall x \in A_8, \uparrow x = \text{montee\_sp}(x)$  *)
let montee_sp = fonction
  nto -> [nto;tou]      | tou -> [tou]
  | eq -> [eq]          | po -> [po;tou;ti;tii;eq]
  | ti -> [ti;eq]       | tii -> [tii;eq]
  | nti -> [nti;ti;eq]  | ntii -> [ntii;tii;eq];;

(* Table 12,  $\forall x \in A_2, \downarrow x = \text{descente\_pt}(x)$  *)
let descente_pt = fonction egal -> A2 | diff -> [diff];;

(* Table 14,  $\forall x \in A_8, \downarrow x = \text{descente\_sp}(x)$  *)
let descente_sp = fonction
  nto -> [nto]          | tou -> [tou;nto;po]
  | po -> [po]          | eq -> [eq;ti;nti;po;tii;ntii]
  | ti -> [ti;po;nti]   | tii -> [tii;po;ntii]
  | nti -> [nti]        | ntii -> [ntii];;

```

Le test de chacune des propriétés donne les résultats suivants:

```

#commut_convert_inv set_equal montee_pt inv_pt A2;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_2, \uparrow r^1 = (\uparrow r)^1$  *)
#distrib_convert_transit set_equal montee_pt X_pt A2;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_2 \times A_2, \uparrow r_1 \times_2 \uparrow r_2 = \uparrow (r_1 \times_2 r_2)$  *)
#commut_convert_inv set_equal montee_sp inv_sp A8;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_8, \uparrow r^1 = (\uparrow r)^1$  *)
#distrib_convert_transit set_equal montee_sp X_sp A8;;
- : bool = false (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_8 \times A_8, \uparrow r_1 \times_8 \uparrow r_2 \neq \uparrow (r_1 \times_8 r_2)$  *)
#distrib_convert_transit set_is_incl montee_sp X_sp A8;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_8 \times A_8, \uparrow r_1 \times_8 \uparrow r_2 \subseteq \uparrow (r_1 \times_8 r_2)$  *)

#commut_convert_inv set_equal descente_pt inv_pt A2;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_2, \downarrow r^1 = (\downarrow r)^1$  *)
#distrib_convert_transit set_incl descente_pt X_pt A2;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_2 \times A_2, \downarrow r_1 \times_2 \downarrow r_2 \supseteq \downarrow (r_1 \times_2 r_2)$  *)
#commut_convert_inv set_equal descente_sp inv_sp A8;;
- : bool = true (*  $\forall r \in A_8, \downarrow r^1 = (\downarrow r)^1$  *)
#distrib_convert_transit set_equal descente_sp X_sp A8;;
- : bool = false (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_8 \times A_8, \downarrow r_1 \times_8 \downarrow r_2 \neq \downarrow (r_1 \times_8 r_2)$  *)
#distrib_convert_transit set_incl descente_sp X_sp A8;;
- : bool = true (*  $\forall (r_1, r_2) \in A_8 \times A_8, \downarrow r_1 \times_8 \downarrow r_2 \supseteq \downarrow (r_1 \times_8 r_2)$  *)

```

Annexe B. Preuve axiomatique des propriétés de A_8 et A_2

L'algèbre A_8 (resp. A_2) est obtenue par appauvrissement de A_{13} (resp. A_3). Il est par conséquent possible d'obtenir les propriétés des algèbres appauvries à partir des algèbres initiales. Les opérateurs d'appauvrissement correspondants sont introduits sur deux algèbres quelconques Γ (initiale) et Γ' (appauvrie):

$$\begin{aligned} \Downarrow: 2^\Gamma &\longmapsto 2^{\Gamma'} \\ \Uparrow: 2^{\Gamma'} &\longmapsto 2^\Gamma \end{aligned}$$

respectant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Downarrow \Uparrow \rho = \rho \\ (2) \quad &\Uparrow \Downarrow \rho = \rho \end{aligned}$$

Les opérateurs de réciprocité, transitivité et conversion (ascendante et descendante) sont définis par l'appauvrissement:

$$\begin{aligned} (\text{définition } ^{-1} \text{ sur } \Gamma') \quad &\rho^{-1} = \Downarrow (\Uparrow \rho)^{-1} \\ (\text{définition } \times \text{ sur } \Gamma') \quad &\rho_1 \times \rho_2 = \Downarrow (\Uparrow \rho_1 \times \Uparrow \rho_2) \\ (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \quad &\rightarrow \rho = \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho \end{aligned}$$

On peut alors prouver (sur Γ'):

$$\begin{aligned} (\text{commutativité } \rightarrow / \Downarrow \text{ sur } \Gamma) \quad &\rightarrow \Downarrow \rho && (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\ &= \Downarrow \rightarrow \Uparrow \Downarrow \rho && (2) \\ &= \Downarrow \rightarrow \rho && \diamond \\ (\text{commutativité } \rightarrow / \Uparrow \text{ sur } \Gamma') \quad &\rightarrow \Uparrow \rho && (2) \\ &= \Uparrow \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho && (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\ &= \Uparrow \rightarrow \rho && \diamond \\ (\text{idempotence de } \rightarrow) \quad &\rightarrow \rightarrow \rho && (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\ &= \Downarrow \rightarrow \Uparrow \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho && (2) \\ &= \Downarrow \rightarrow \rightarrow \Uparrow \rho && (\text{idempotence de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma) \\ &= \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho && (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\ &= \rightarrow \rho && \diamond \\ (\text{inclusion dans le converti}) \quad &\rho && (1) \\ &= \Downarrow \Uparrow \rho && (\text{inclusion dans le converti sur } \Gamma) \\ &\subseteq \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho && (\text{définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\ &= \rightarrow \rho && \diamond \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(distributivité conversion/réciprocité)} & \rightarrow \rho^{-1} & \text{(définition }^{-1} \text{ sur } \Gamma') \\
& = \rightarrow \Downarrow (\Uparrow \rho)^{-1} & \text{(commutativité } \rightarrow / \Downarrow \text{ sur } \Gamma') \\
& = \Downarrow \rightarrow (\Uparrow \rho)^{-1} & \text{(distributivité sur } \Gamma') \\
& = \Downarrow (\rightarrow \Uparrow \rho)^{-1} & (2) \\
& = \Downarrow (\Uparrow \Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho)^{-1} & \text{(définition }^{-1} \text{ sur } \Gamma') \\
& = (\Downarrow \rightarrow \Uparrow \rho)^{-1} & \text{(définition } \rightarrow \text{ sur } \Gamma') \\
& = (\rightarrow \rho)^{-1} & \diamond \\
\text{(distributivité de } \rightarrow \text{ sur } \times) & \rightarrow \rho_1 \times \rightarrow \rho_2 & \text{(définition } \times \text{ sur } \Gamma') \\
& = \Downarrow (\Uparrow \rightarrow \rho_1 \times \Uparrow \rightarrow \rho_2) & \text{(commutativité } \rightarrow / \Uparrow \text{ sur } \Gamma') \\
& = \Downarrow (\rightarrow \Uparrow \rho_1 \times \rightarrow \Uparrow \rho_2) & \text{(distributivité de } \rightarrow / \times \text{ sur } \Gamma') \\
& R \Downarrow \rightarrow (\Uparrow \rho_1 \times \Uparrow \rho_2) & \text{(commutativité } \rightarrow / \Downarrow \text{ sur } \Gamma') \\
& = \rightarrow \Downarrow (\Uparrow \rho_1 \times \Uparrow \rho_2) & \text{(définition } \times \text{ sur } \Gamma') \\
& = \rightarrow (\rho_1 \times \rho_2) & \diamond
\end{array}$$

Pour la propriété de distributivité, elle est établie par la relation R entre les deux termes de la preuve. Cette relation est variable suivant les algèbres et les opérateurs considérés (elle peut être $=$, \supseteq ou \subseteq).

Si l'on considère A_{13} (resp. A_3) pour Γ et A_8 (resp. A_2) pour Γ' :

- \Uparrow est défini par l'union des conversions de Γ vers Γ' du §7.2; \Downarrow est défini par sa réciproque. Cette réciproque n'est pas définie sur 2^Γ tout entier mais l'est sur son sous-ensemble correspondant aux unions de conversions du §7.2. Ce sous-ensemble est clos par $^{-1}$, \times et \rightarrow ce qui suffit pour établir les propriétés ci-dessus: \Downarrow est toujours défini.
- les propriétés (1-2) sont valides pour celles-ci;
- les opérateurs $^{-1}$ (table 11), \times [RAN92b] et \rightarrow (table 14) sont définis exactement comme préconisé.

Par conséquent, comme les propriétés à démontrer sont valides dans A_{13} (resp. A_3) elles le sont aussi dans A_8 (resp. A_2).

Annexe C. Intervalles en dimension quelconque

Cette annexe présente l'extension du travail proposé pour le temps à l'espace. L'espace est modélisé comme un espace vectoriel et la généralisation se fait au travers des produits (applicable à la représentation symbolique comme à la représentation numérique). Ici, tous les exemples sont en dimension 2.

L'ordre sur la droite permet de séparer celle-ci en trois zones. Dans un espace de dimension n il permet de séparer l'espace en 3^n zones (voir figure 11).

>	NW	N	NE
=	W	=	E
<	SW	S	SE
d2/d1	<	=	>

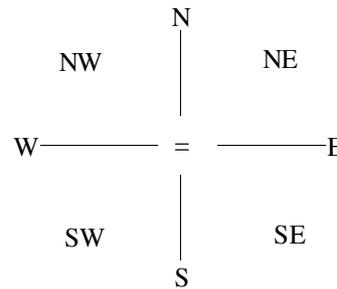


Table 15 et Figure 11. Les $3^2=9$ relations symboliques exhaustives et exclusives deux à deux entre des points en dimension 2.

Celle-ci, à son tour, permet de considérer une propriété de non-croisement: elle est vérifiée s'il n'y a croisement sur aucune des dimensions. En dimension n , «supérieur» (noté $>^n$) signifie que la relation liant les deux points est le produit sur chacune des dimensions de $>$ ou $=$ mais pas exclusivement $=$. En dimension 2, cela se traduit par $\{N, NE, E\}$. L'égalité est définie par le produit de $n =$ (noté $=^n$). La définition du croisement ne subit alors pas de modification; une fonction f satisfait à la propriété de non croisement si et seulement si:

$$\forall x, y \quad x >^n y \equiv \neg(fx <^n fy)$$

La généralisation de l'intervalle sur la droite à l'intervalle en dimension n se fait très simplement: un intervalle est caractérisé par deux bornes (quelquesoit la dimension). Les deux bornes sont des points dont l'un (la fin) est supérieur ou égal à l'autre (le début). Cet intervalle représente l'ensemble des points qui se trouvent entre les deux bornes. «Entre» s'interprète numériquement comme le fait que chaque coordonnée du point se trouve entre les coordonnées des bornes dans chacune des dimensions (par exemple $\text{debut} \leq^n \text{point} <^n \text{fin}$). Géométriquement, l'intervalle constitue un (hyper-)parallélépipède. La discussion sur l'appartenance ou non des bornes à l'intervalle, abordée au §2.3 est reconductible ici. Les propriétés de l'intervalle sont préservées (l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle, etc.).

b													
m													
o													
s													
f													
d													
e													
d ⁻¹													
f ⁻¹													
s ⁻¹													
o ⁻¹													
m ⁻¹													
b ⁻¹													
d ₂ /d ₁	b ⁻¹	m ⁻¹	o ⁻¹	s ⁻¹	f ⁻¹	d ⁻¹	e	d	f	s	o	m	b

Table 16. Les 13²=169 relations symboliques exhaustives et exclusives deux à deux entre des régions interprétées comme des intervalles de dimension 2. Chaque case représente la relation \blacksquare r \square où r est le produit de deux relations entre intervalles de dimension 1.

Un ensemble de 13ⁿ relations exhaustives et exclusives deux à deux entre intervalles en dimension n peut être établie. De ces relations seule celle composée de «e» est sa propre réciproque. Les autres ayant pour réciproque le produit des réciproques de leurs facteurs (symétrie par rapport à la case centrale de la table 16). La conversion de ces relations en relations sur les bornes est aussi préservée: les relations sont maintenant exprimées à l'aide d'un quadruplé de relations définies à la table 15. Par ailleurs, l'interprétation de ceci en utilisant le projeté des points (et des intervalles) sur les droites du repère de l'espace donne exactement les mêmes résultats.

La preuve de l'extension des résultats en dimension n se fait en considérant l'extension des résultats en dimension 1. Soit une structure $\langle \Gamma \times^{-1} \rangle$, on veut prouver la validité des résultats pour la structure $\langle \Gamma^n \times^n^{-1} \rangle$ définie de telle sorte que:

$$\forall r_1 \in \Gamma, \dots, r_n \in \Gamma, r = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n$$

(définition de ⁻¹ sur Γ^n) $r^{-1} = (r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1})$

(définition de \times sur Γ^n) $r \times r' = \bigcup_{r'_1 \in r_1 \times r'_1, \dots, r'_n \in r_n \times r'_n} \{(r'_1, \dots, r'_n)\}$

(définition de \rightarrow sur Γ^n) $\rightarrow r = \bigcup_{r'_1 \in r_1, \dots, r'_n \in r_n} \{(r'_1, \dots, r'_n)\}$

Ces trois opérateurs sont respectivement étendus de telle sorte que $\rho^{-1} = \{r^{-1}; r \in \rho\}$, $\rho \times \rho' = \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} r \times r'$ et $\rightarrow \rho = \bigcup_{r \in \rho} \rightarrow r$.

On peut alors prouver (sur Γ^n):

$$\begin{aligned}
& \text{(distributivité conversion/réciprocité)} \quad \rightarrow \rho^{-1} && \text{(extension de }^{-1} \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \rightarrow \{r^{-1}; r \in \rho\} && \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \rightarrow r^{-1} && \text{(définition de }^{-1} \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \rightarrow (r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1}) && \text{(définition de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r'_1 \in \rightarrow r_1^{-1}, \dots, r'_n \in \rightarrow r_n^{-1}} \{(r'_1, \dots, r'_n)\} && \text{(distributivité } \rightarrow /^{-1} \text{ dans } \Gamma) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r'_1 \in (\rightarrow r_1)^{-1}, \dots, r'_n \in (\rightarrow r_n)^{-1}} \{(r'_1, \dots, r'_n)\} && \text{(définition de }^{-1} \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r'_1 \in (\rightarrow r_1), \dots, r'_n \in (\rightarrow r_n)} \{(r'_1, \dots, r'_n)^{-1}\} && \text{(extension de }^{-1} \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \left[\bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r'_1 \in \rightarrow r_1, \dots, r'_n \in \rightarrow r_n} \{(r'_1, \dots, r'_n)\} \right]^{-1} && \text{(définition de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \left[\bigcup_{r \in \rho} \rightarrow r \right]^{-1} && \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = (\rightarrow \rho)^{-1} && \diamond
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(inclusion dans le converti)} \quad \rho && \text{(définition de } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \{(r_1, \dots, r_n)\} && \text{(inclusion du converti dans } \Gamma) \\
& \subseteq \bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r'_1 \in \rightarrow r_1, \dots, r'_n \in \rightarrow r_n} \{(r'_1, \dots, r'_n)\} && \text{(définition de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho} \rightarrow r && \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \rightarrow \rho && \diamond
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(distributivité de } \rightarrow \text{ sur } \times) \quad \rightarrow (\rho \times \rho') && \text{(extension de } \times \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \rightarrow \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} r \times r' && \text{(définition de } \times \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \rightarrow \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} \bigcup_{r''_1 \in r_1 \times r'_1, \dots, r''_n \in r_n \times r'_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} && \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} \rightarrow \bigcup_{r''_1 \in r_1 \times r'_1, \dots, r''_n \in r_n \times r'_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} && \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} \bigcup_{r''_1 \in (r_1 \times r'_1), \dots, r''_n \in (r_n \times r'_n)} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} && \text{(distributivité de } \rightarrow \text{ sur } \times) \\
& \mathbf{R} \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} \bigcup_{r''_1 \in \rightarrow r_1 \times \rightarrow r'_1, \dots, r''_n \in \rightarrow r_n \times \rightarrow r'_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} && \text{(extension de } \times \text{ sur } \Gamma^n)
\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{r \in \rho, r' \in \rho'} \left[\bigcup_{r''_1 \in \rightarrow r_1, \dots, r''_n \in \rightarrow r_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} \right] \times \left[\bigcup_{r''_1 \in \rightarrow r'_1, \dots, r''_n \in \rightarrow r'_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} \right]$$

(extension de \times sur Γ^n)

$$= \left[\bigcup_{r \in \rho} \bigcup_{r''_1 \in \rightarrow r_1, \dots, r''_n \in \rightarrow r_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} \right] \times \left[\bigcup_{r' \in \rho'} \bigcup_{r''_1 \in \rightarrow r'_1, \dots, r''_n \in \rightarrow r'_n} \{(r''_1, \dots, r''_n)\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \text{(définition de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \left[\bigcup_{r \in \rho} \rightarrow r \right] \times \left[\bigcup_{r' \in \rho'} \rightarrow r' \right] \quad \text{(extension de } \rightarrow \text{ sur } \Gamma^n) \\
& = \rightarrow \rho \times \rightarrow \rho' \quad \diamond
\end{aligned}$$

Pour la propriété de distributivité, elle est établie par la relation R entre les deux termes de la preuve. Cette relation est variable suivant les algèbres et les opérateurs considérés (elle peut être $=$, \supseteq ou \subseteq).

Si l'on considère A_{13} (resp. A_3) pour Γ , comme les propriétés à démontrer sont valides pour A_{13} (resp. A_3) elles le sont aussi sur leurs produits.

Annexe D. Voisinage conceptuel

De récents travaux ont portés sur la notion de voisinage conceptuel [FRE 92]. Cette notion a été utilisée intuitivement dans la construction des tables de montée et de descente. Le lien est fait ici entre celles-ci.

Deux relations de Γ sont *conceptuellement voisines* si elles peuvent être transformées l'une en l'autre par une déformation continue des objets sur lesquels elles portent. La déformation des objets reste un terme vague. Trois systèmes sont proposés pour A_{13} et dépendent de l'opération retenue pour faire varier les intervalles.

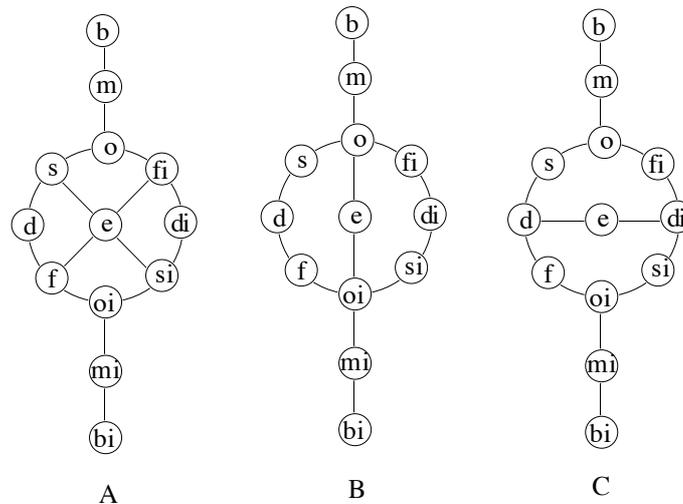


Figure 12 (d'après [FRE 92]). Graphe de voisinage entre les relations sur les intervalles temporels. Les nœuds représentent les relations et les arcs du graphes représentent le voisinage entre ces relations suivant que les intervalles sont déformés en (A) bougeant graduellement l'une des extrémités, (B) bougeant un intervalle tout en maintenant sa durée fixe et (C) en fixant le milieu d'un intervalle tout en autorisant la variation de sa durée¹.

Un *voisinage conceptuel* est défini comme un ensemble de relations de Γ dont les éléments constituent un sous-graphe connexe du graphe de voisinage de Γ .

Freska remarque que \times_{13} donne des voisinages conceptuels (pour A). Indépendamment, le graphe de voisinage (voir figure 13) pour A_8 est établi dans [RAN 92a, b]. Ils ont remarqué que l'application de la transitivité à deux relations retournait un ensemble de relations qui constituait un voisinage conceptuel. Cette remarque a été utilisée pour prouver la table de A_8 [RAN 92b]: quand une sortie de la table contient deux relations, on sait alors qu'elle contient au moins un chemin (dans le graphe ci-dessus) entre ces relations.

¹ Christian Freksa considère que les propriétés établies dans [FRE92] sont valides pour les trois types de définitions. En fait, il semble qu'elles ne le soient toutes que pour A.

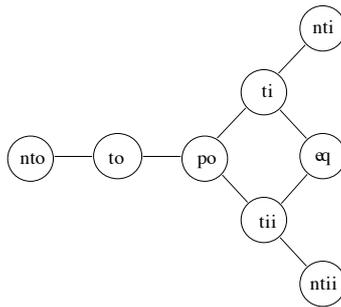


Figure 13 (d’après [RAN 92b]). Graphe de voisinage entre les relations sur les régions spatiales. Les auteurs n’ont envisagé qu’une transformation: celle correspondant à déformer continuellement l’enveloppe convexe d’une région connexe. On peut remarquer que ce graphe est homomorphe au graphe A de la figure précédente (avec pour homomorphisme la fonction associant aux nœuds de A_{13} leurs équivalents en A_8 et traitant de même les arcs).

La connaissance incomplète d’une relation entre deux objets est appelée *connaissance grossière* si l’ensemble de relations en disjonction représentant cette connaissance forme un voisinage conceptuel.

La notion de connaissance grossière peut sembler voisine de celle de granularité. Cependant, elle n’est ici utilisée que pour représenter des disjonctions de relations voisines sans faire appel à une notion explicite de granularité. La notion de voisinage conceptuel a été utilisée intuitivement pour produire les tables de montée et de descente présentée ci-dessus. La méthode utilisée a consisté à prendre les deux éléments en relation et à les déformer autant que faire ce peut sans violer l’une des contraintes posées au §3.3. Dés lors, il est normal que les ensembles obtenus constituent un voisinage conceptuel. La table 17 et la figure 14 donnent deux représentations de ces voisinages.

r	b	m	o	s	f	d	e	d ⁻¹	f ⁻¹	s ⁻¹	o ⁻¹	m ⁻¹	b ⁻¹
$\xi \uparrow \xi' \cdot r$													
$\xi \downarrow \xi' \cdot r$													

Table 17. Conversion ascendante et descendante des relations entre intervalles exprimées dans le formalisme de [FRE 92] qui consiste à faire figurer les éléments de l’ensemble sur le graphe de voisinage.

Les résultats ci-dessus sont immédiatement vérifiés pour la granularité spatiale en utilisant simplement l’appauvrissement de l’algèbre qui se traduit par l’homomorphisme sur le graphe.

Freksa a transformé le système de Allen en un système muni de 10 relations qui représentent des voisinages. Ces 10 relations munies de l’opération de conjonction permettent d’exprimer tout ce qui est exprimable avec les relations de Allen munies de la disjonction. Cet ensemble de relations est clos par transitivité, il donne donc une table de transitivité s’exprimant uniquement

en fonction de ces voisinages. L'efficacité d'une telle table par rapport à la manipulation de disjonctions est évident (et aurait pu être utilisé au sein de l'annexe A).

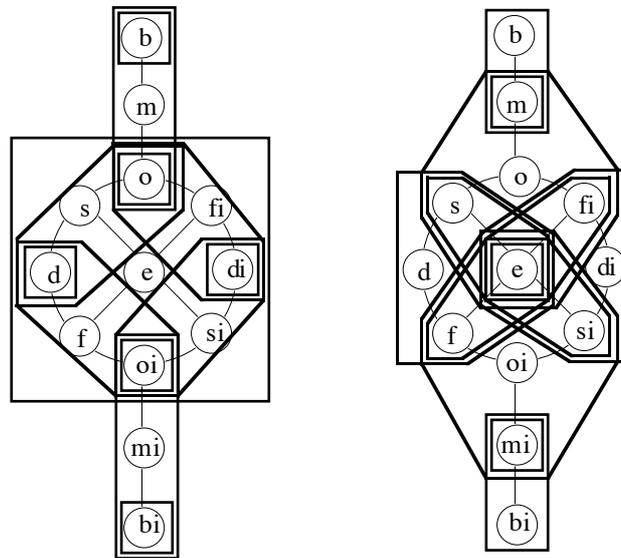


Figure 14. Le graphe de voisinage est représenté avec les ensembles correspondants aux voisinages engendrés par les opérations de conversion ascendante (à gauche) et descendante (à droite).

Lorsque les conversions entre granularités sont prises en compte, les voisinages obtenus ne sont pas les mêmes que ceux considérés comme primitifs par Christian Freksa (ils sont uniquement choisis pour des propriétés de la structure qu'ils composent). On dispose en effet des 13 relations de Allen et de 17 voisinages (disjonctions de relations primitives) dont 8 ne font pas partie de ces relations [FRE 92, fig. 7]. Par ailleurs, si cet ensemble est clos par réciprocity il ne l'est ni par conversion (ascendante/descendante), ni par transitivité.

Cependant, ceci ne permet pas de dire s'il existe ou non un ensemble de voisinages ayant de bonnes propriétés par rapport aux opérations de conversion (clos par transitivité et conversion). L'existence d'un tel ensemble devrait permettre de construire un système d'inférence temporelles entre plusieurs granularités de manière relativement efficace.