Transformations géometriques

Essentielles dans de nombreuses applications graphiques

☞ Changer position, taille, orientation d'un objet

☞ Exprimer coordonnées décrivant un objet dans différents repères

Transformations de base :

- Translation
- Homothétie
- Rotation

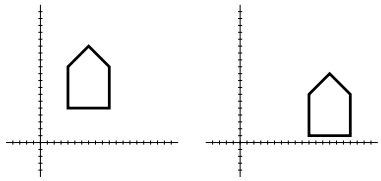
Transformations géometriques 2D

Translation

(t_x , t_y) vecteur de translation

$x' = x + t_x$

$y' = y + t_y$



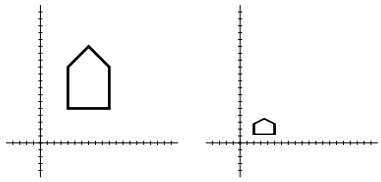
Homothétie (Scaling)

s_x facteur échelle en x

s_y facteur échelle en y

$x' = s_x \cdot x$

$y' = s_y \cdot y$



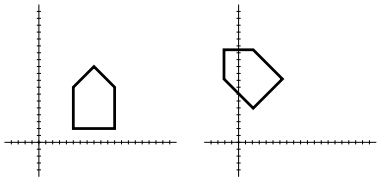
Transformations géométriques 2D

Rotation

Θ angle de rotation

$x' = x \cdot \cos\Theta - y \cdot \sin\Theta$

$y' = x \cdot \sin\Theta + y \cdot \cos\Theta$



Combinaison transformations géométriques

séquences de transformations géométriques

translation : $P' = P + T$

homothétie : $P' = H \cdot P$

rotation : $P' = R \cdot P$

rotation R1 puis homothétie H puis rotation R2

$P' = R1 \cdot P$ puis $P'' = H \cdot P'$ puis $P''' = R2 \cdot P''$ soit $P''' = R2 \cdot H \cdot R1 \cdot P$

rotation R1 puis translation T puis rotation R2

$P' = R1 \cdot P$ puis $P'' = T + P'$ puis $P''' = R2 \cdot P''$ soit $P''' = ???\ P$

problème : non uniformité de l'expression

mais au fait pourquoi est-ce un problème ?

Combinaison transformations géométriques

calculer les coordonnées finales directement à partir des coordonnées initiales est *plus efficace*

en calcul : un seul calcul quel que soit le nombre de transformations élémentaires

en mémoire : plus nécessaire de stocker les transformations intermédiaires

=> utilisation des coordonnées homogènes

Coordonnées Homogènes

idée : rajouter une dimension

coordonnées cartésiennes		coordonnées homogènes	
(x,y)	→	(x•w, y•w, w)	avec $w \neq 0$
(x, y, z)		(x•w, y•w, z•w,w)	
(X/W, Y/W)	←	(X, Y , W)	
(X/W, Y/W, Z/W)		(X, Y , Z, W)	

On prend w = 1

Les trois transformations 2D peuvent être représentées par matrice 3x3 et être traitées commes des multiplications

Représentation matricielle des transformations

homothétie de facteurs s_x , s_y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

rotation d'angle *a*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

translation de vecteur (tx , ty)

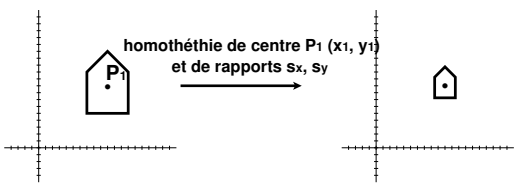
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composition des transformations

toute séquence de transformations affines est une transformation affine et peut être représentée par *une seule* matrixe 3x3

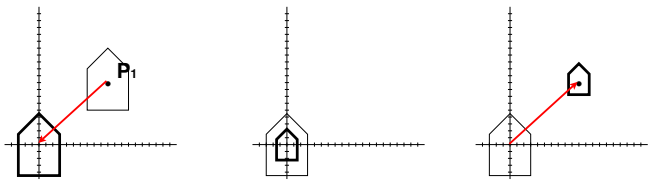
La matrice de la transformation composée est le produit des matrices des transformations de base

exemple : homothétie de centre quelconque



exemple : homothétie de centre quelconque

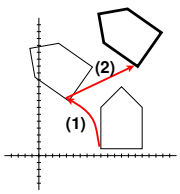
(1) translation $(-x_1, -y_1)$ (2) homothéthie (s_x, s_y) (3) translation (x_1, y_1)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \overset{(3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{(2)}{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{(1)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

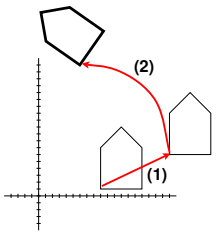
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1 \cdot (1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1 \cdot (1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composition des transformations



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & t_x \\ \sin a & \cos a & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

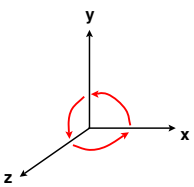


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

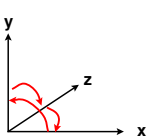
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & t_x \cdot \cos a - t_y \cdot \sin a \\ \sin a & \cos a & t_x \cdot \sin a + t_y \cdot \sin a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations 3D

Systèmes de coordonnées 3D



repère direct
(main droite)



repère indirect
(main gauche)

Représentation matricielle transformations 3D

translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

homothétie

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation par rapport à O_x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation par rapport à O_y

$$\begin{bmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation par rapport à O_z

$$\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$