Algèbres d'intervalles sur des domaines temporels arborescents

Interval algebras on branching temporal domains

Jérôme Euzenat

INRIA Rhône-Alpes

655 avenue de l'Europe, 38330 Montbonnot Saint-Martin (France)
Jerome.Euzenat@inrialpes.fr

Résumé

Afin de concilier les algèbres d'intervalles temporels avec un modèle temporel arborescent, on présente une algèbre d'intervalles dont le modèle du temps est ordonné par un ordre partiel. Elle est ensuite déclinée suivant l'orientation de l'arborescence. L'approche utilisée est classique puisqu'elle consiste à produire une algèbre d'instants dans chacun de ces cas et de « passer à l'intervalle ». Elle est cependant complexifiée par l'introduction de la notion de voisinage conceptuel dont le passage à l'intervalle nécessite de nouveaux développements. De plus, la symétrie passé/futur dans le cas arborescent est nettement mise en évidence et, en particulier, dissociée de la symétrie des relations réciproques.

Mots Clef

Algèbres de relations, algèbres d'intervalles, temps arborescent, domaine temporel partiellement ordonné, restriction.

Abstract

In order to combine algebras of temporal relations with a branching model of time, a new relation algebra is presented in which time is partially ordered. This algebra is then restricted with regard to the branching-orientation (branching past or branching future). A classical approach leading from the definition of an instant algebra to an interval algebra is followed. But the notion of conceptual neighbourhood requires new methods when considering partial ordering. The past/future symmetry is presented and dissociated from the symmetry of converse relations.

Keywords

Relation algebra, interval algebra, branching time, partially ordered temporal domain, restriction.

L'algèbre d'intervalles introduite dans [1] est très populaire lorsqu'il s'agit de représenter le temps. Elle s'interprète sur le domaine temporel linéaire. Il est cependant d'autres représentations du temps (ou plutôt de l'incertitude sur le temps) qui font usage d'un domaine non linéaire. On parle souvent de temps arborescent lorsqu'il s'agit de représenter le fait que le futur peut avoir plusieurs visages alternatifs [4]. Le temps n'est pas réellement arborescent mais les différents scenarii alternatifs constituent des branches dans lesquelles le temps s'écoule indépendamment. Une algèbre d'intervalles permettant de manipuler un domaine temporel partiellement ordonné est présenté ici avec la manière de l'obtenir.

L'intérêt d'un tel travail est double: tout d'abord produire l'algèbre qui peut être utilisée dans différents contextes dans lesquels les rapports entre évènements ne sont pas forcément considérés linéairement. Ensuite, développer les outils qui permettent de construire de telles algèbres (en effet, suivant les propriétés de l'ordre dans lequel elle se place la base de l'algèbre diffère).

La connexion entre raisonnement qualitatif et temps arborescent a été récemment explorée [14] dans de cadre de la simulation qualitative. Cependant, la simulation n'utilise pas la notion d'intervalles. Une algèbre de ce type a été produite dans [2] (voir §5). Cependant, il ne s'agit pas d'une algèbre d'intervalles au sens de [7].

Une telle algèbre peut être utilisée pour placer dans le temps des contraintes qui vont dépendre du cours des choses (un évènement est avant un autre dans une branche et simultané dans une autre). Si ce type de contraintes est exprimé par l'incertitude classique ({b,e} dans le cas linéaire) ceci ne permet pas de prendre en compte des contraintes spécifiques à chaque branche. L'édition de documents multimédia, par exemple, utilise aussi très souvent les algèbres d'intervalles et est amenée à prendre en compte l'indéterminisme des relations entre évènements [16, 8]. Par exemple, le fait qu'un utilisateur presse ou non sur un bouton peut mener à deux scenarii alternatifs qui sont plus naturellement représentés par deux branches temporelles qu'à l'aide de disjonctions.

Le but du travail présenté ici est donc de définir cette algèbre. Pour cela, après une présentation des notions d'algèbres de relations binaires et d'algèbres d'intervalles (§1), une algèbre d'instants définie en relation avec un ordre partiel à l'image de l'algèbre d'instants définie dans le cas linéaire est introduite (§2). Puis cette algèbre permettra de définir l'algèbre d'intervalles (§3). Pour cela, on présentera les techniques générales permettant ce passage dont certaines sont inédites.

Enfin, comme les modèles temporels dans un ordre partiel peuvent être de plusieurs types, on se penchera sur le cas de modèles arborescents (soit vers le passé, soit vers le futur, §4). On exhibera alors une symétrie passé/futur beaucoup plus structurante qu'elle n'est dans le cas linéaire puisqu'elle se distingue nettement de la symétrie entre une relation et sa réciproque. On conclura sur les relations existant entre les différentes algèbres présentées.

1. Algèbres d'intervalles étendues

Un travail considérable a été fait sur la représentation qualitative du temps. On rappelle ici très brièvement plusieurs notions concernant les algèbres de relations binaires temporelles qui seront utilisées dans la suite.
On considérera une structure légèrement étendue par rapport aux algèbres de relations classiques en y adjoignant leur voisinage qui introduisent une structure topologique sur la base de l'algèbre.
Ainsi, après la définition d'une algèbre de relation étendue (§1.1), on présente ci-dessous les algèbres d'instants (§1.2) et d'intervalles (§1.3) ainsi que le passage de l'une à l'autre (§1.4).

1.1. Algèbre de relations étendue

Une algèbre de relations binaires (on parlera d'algèbre de relations ci-après) est une structure $<A,\wedge,\vee,*,1,0,1',\neg>$ où $<A,\wedge,\vee,1,0>$ est une algèbre booléenne, * est une loi interne binaire associative d'élément neutre 1' (à gauche et à droite) et distributive par rapport à $\vee$ et $\neg$ est un opérateur unaire interne idempotent et distributif par rapport à $\wedge$, $\vee$ et *.

On s'intéressera ici à un type particulier d'algèbres de relations où A est l'ensemble des parties d'un ensemble de base Γ clos par l'opérateur $\neg$ (ici $^{-1}$), $\wedge$ et $\vee$ étant les opérations ensemblistes usuelles ($\cap$ et $\cup$). On notera de telles algèbres de relations par $<2^{\Gamma},\cap,\cup,o,\Gamma,\{\},e,^{-1}>$.
Lorsque l'ensemble Γ est considéré comme un ensemble de relations binaires possibles entre des objets d'un domaine particulier, o est la relation de composition entre ces relations et $^{-1}$ permet d'obtenir la relation réciproque. Une relation r telle que $r=r^{-1}$ sera qualifiée d'auto-réciproque. Dans la suite la convention qui consiste à placer un « i » à la suite d'un nom de relation pour dénoter sa réciproque sera souvent utilisée.
L'utilisation d'ensembles de relations permet de pallier le manque de connaissance sur l'exacte relation entre deux objets en exprimant une disjonction de relations possibles (les relations de l'ensemble). Ainsi, si les trois relations de la base sont <, > et =, il est possible d'exprimer que x est avant ou égal à y par $x\{<=\}y$. Deux exemples bien connus d'algèbres de relations sont donnés ci-après.

Cette notion d'algèbre de relations est ici étendue en considérant une notion de voisinage, dit voisinage conceptuel [10, 6]. Un voisinage N sera simplement une relation binaire réflexive et symétrique entre les éléments de Γ. Cette relation est représentée par un graphe non orienté.
Dans le cadre de la représentation de relations entre objets dans un espace topologique, elle exprime le voisinage entre deux relations lorsque la relation entre deux objets peut passer directement de l'une à l'autre par une « déformation » continue des objets. Les voisinages conceptuels sont très utiles pour engendrer les tables de composition [11] ou les opérateurs de changement de granularité [5].

1.2. Algèbres d'instants

Un instant est une entité temporelle sans durée (que l'on peut aussi qualifier de point par analogie avec un point sur une droite). Il peut être représenté métriquement par une date. La représentation qualitative de ces instants consiste à les identifier et identifier les relations qu'ils entretiennent. L'algèbre d'instants présente trois relations possibles qui sont mutuellement exclusives et exhaustives. Elles sont nommées antérieur (<), postérieur (>) et simultané (=). L'ensemble {<,=,>} est nommé A3, il est la base de l'algèbre d'instants (nommée aussi A3).

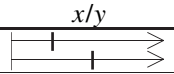
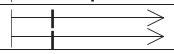
relation (r): $x\ r\ y$	x/y	réciproque: $y\ r^{-1}\ x$
antérieur (<)		postérieur (>)
simultané (=)		=

Tableau 1. Les 3 relations de A3.

Le Tableau 2 donne la table de composition entre ces relations. Il est parfois possible de déduire de l'information plus précise à partir de celle donnée. Ainsi, si x est antérieur ou simultané à y ($x\{<=\}y$) qui est antérieur à z ($y\{<\}z$), il est possible de déduire que $x\{<\}z$ si la composition de < et = est < et celle de < et < est < aussi ($\{<=\}o\{<\}=\{<o<\}\cup\{=o<\}=\{<\}\cup\{<\}=\{<\}$).

o3	>	=	<
>	>	>	<=>
=	>	=	<
<	<=>	<	<

Tableau 2. Table de composition de A3.

Le graphe de voisinage est donné sur la figure 1.

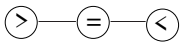


figure 1: Graphe de voisinage pour A3. Le graphe est composé des relations comme nœuds et des voisinages conceptuels comme arcs.

1.3. Algèbres d'intervalles

Un intervalle est une entité temporelle connexe qui dure. Il peut être vu comme un segment sur une droite. Une représentation métrique de l'intervalle est un couple de dates (date de début et date de fin) ou une date et un nombre (date de début et durée). Les intervalles sont manipulés à l'aide de 13 relations mutuellement exclusives et exhaustives (voir Tableau 3).

L'opérateur de composition est représenté par une table [1] similaire à celle du Tableau 2. Elle prendrait trop de place ici et n'est donc pas montrée.

Le voisinage dépend du type de modification que l'on fait subir aux éléments [6]. Freksa en propose trois: (A) déplacement continu d'une extrémité sans déplacer l'autre, (B) translation de l'intervalle et (C) déplacement simultané

des deux extrémités sans modifier le centre de gravité. Un graphe de voisinage pour A13 est donné dans la figure 2. Il correspond au A-voisinage [10], le seul voisinage qui sera considéré ici.

relation (r): *x1* r *x2*	*x1*/*x2*	réciproque: *x2* r^{-1} *x1*
avant (b)		après
pendant (d)		contient
recouvre (o)		recouvert par
commence (s) (et termine avant)		commencé par (et termine après)
termine (f) (et commence après)		terminé par (et commence avant)
rencontre (m)		rencontré par
égale (e)		e

Tableau 3. (d'après [1]). Les 13 relations de A13.

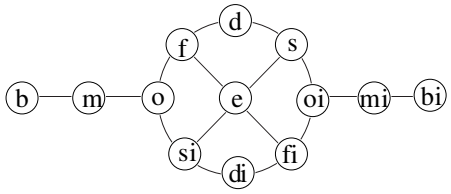


figure 2 (d'après [10]). Graphe de voisinage pour A13. La déformation considérée (nommée A) est la translation continue d'une extrémité d'un intervalle, les trois autres étant fixes.

1.4. Des instants aux intervalles

Il existe bien entendu un rapport étroit entre l'algèbre d'instants et l'algèbre d'intervalles. Ce rapport a été plus systématiquement exploré récemment [7]. Ainsi, à n'importe quelle algèbre de relations correspond une algèbre d'intervalles en fonction de n'importe quelle relation r de l'algèbre initiale. Dans une telle algèbre les objets x en relation sont des couples d'objets $(x^- \; x^+)$ de l'algèbre initiale contraints par la relation r (c'est-à-dire que $x^- r x^+$). Ici, la relation r sera toujours une relation d'ordre. L'algèbre d'intervalles est définie comme suit:

- les relations entre intervalles x et y sont obtenues en considérant les quadruplets de relations (r_1, r_2, r_3, r_4) tels que $x^- r_1 y^+$, $x^- r_2 y^+$, $x^+ r_3 y^-$ et $x^+ r_4 y^+$.
- la relation réciproque est obtenue par distribution de la réciprocité et inversion de r_2 et r_3,
- la composition est obtenue par le produit matriciel où l'addition est remplacée par l'union et la multiplication par la composition.

Ainsi, l'algèbre d'intervalles A13 peut se définir à partir de l'algèbre d'instants A3. La seule contrainte dans la définition d'un intervalle est que le début précède la fin au sens de la relation d'ordre (<). Lorsque le temps est régi par une relation d'ordre total (comme dans A3), il y a potentiellement 3^4=81 combinaisons possibles. Cependant, les intervalles doivent respecter les contraintes suivantes $x^- < x^+$ et $y^- < y^+$. Ces deux contraintes sont appelées γ. À partir de ces deux contraintes il est possible de déduire 5 combinaisons de relations points à points qui sont impossibles dans un ordre:

1. $\gamma \cup \{x^- \geq y^-, x^+ \leq y^-\}$
2. $\gamma \cup \{x^- \geq y^+, x^+ \leq y^+\}$
3. $\gamma \cup \{x^- \leq y^-, x^- \geq y^+\}$
4. $\gamma \cup \{x^+ \leq y^-, x^+ \geq y^+\}$
5. $\gamma \cup \{x^- \geq y^+, x^+ \leq y^-\}$

L'élimination de toutes les combinaisons satisfaisant ces contraintes laissent seulement les 13 relations de A13 telles qu'exprimées au Tableau 4.

*x*r*y*	$x^- r_1 y^-$	$x^- r_2 y^+$	$x^+ r_3 y^-$	$x^+ r_4 y^+$
b	<	<	<	<
d	>	<	>	<
o	<	<	>	<
s	=	<	>	<
f	>	<	>	=
m	<	<	=	<
e	=	<	>	=
m^{-1}	>	=	>	>
f^{-1}	<	<	>	=
s^{-1}	=	<	>	>
o^{-1}	>	<	>	>
d^{-1}	<	<	>	>
b^{-1}	>	>	>	>

Tableau 4: Les 13 relations entre intervalles exprimées en fonction des relations entre leurs extrémités.

Deux techniques ont été proposées dans [9] pour obtenir les voisinages conceptuels d'une manière générale et, en particulier, lors du passage à l'intervalle. La première utilise les relations de connexité dans une représentation géométrique des relations comme des surfaces du demi-plan réel; elle ne se généralise pas aisément. La seconde, considérant que tout intervalle décompose l'espace en trois zones, étant fortement fondé sur la structure d'ordre total des entiers naturels, il n'est pas simplement adaptable à tout type d'intervalle.

Le reste de l'article montre une application des techniques présentées ici qui seront étendues afin de s'accommoder des algèbres de relation étendues.

2. Relations entre instants dans le temps partiellement ordonné

On présente ici les relations possibles entre instants dans un domaine temporel partiellement ordonné. On rappelle d'abord la structure temporelle (§2.1) avant de fournir la totalité de l'algèbre (§2.2).

2.1. Principes

Le temps est traditionnellement assimilé à une droite sur laquelle les points (instants) sont totalement ordonnés. Cependant, de nombreux travaux en informatique manipulent un temps arborescent (dans lequel le futur ou le passé suivent plusieurs branches simultanément). Ces

outils, plus qu'une représentation du temps, sont un moyen pratique de représenter l'absence de connaissance de ce qui s'y déroule dans le futur comme dans le passé.
Pour cela il faut partir d'une axiomatisation du domaine temporel sous la forme d'une relation d'ordre partiel (<) qui est donc:

(transitive) $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$
(anti-symétrique) $x<y \Rightarrow \neg(y<x)$
(anti-réflexive) $\neg(x<x)$

On utilise aussi la relation d'égalité (=) qui est la relation d'équivalence habituelle (lorsque l'on axiomatise à partir de ≤).
Ceci permet de représenter des situations plus générales que celles requises pour les modèles de temps arborescent puisque les situations peuvent être similaire à celles de la figure 3(a) mais aussi de la figure 3(b).

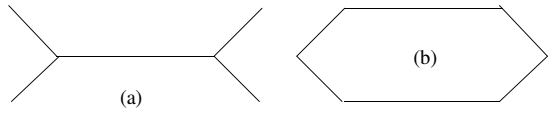


figure 3: Type de situation considérée dans un ordre partiel. La figure représente le graphe de l'ordre (les nœuds ne sont pas représentés) et s'interprète de gauche à droite (antérieur-postérieur).

Dans ce qui suit, les arcs sont toujours orientés de la gauche vers la droite (tout point accessible depuis un autre le long des arcs en ne se déplaçant que de la gauche vers la droite est postérieur au point de départ).

2.2. Algèbres de relations entre points

À partir des deux relations (< et =) il est possible de vérifier qu'en définissant:

$x>y$ comme $y<x$ et
$x|y$ comme $\neg(x=y) \wedge \neg(x<y) \wedge \neg(y<x)$.

on obtient quatre relations exclusives deux à deux et exhaustives. Les différentes situations sont présentées sur le Tableau 5. Aux 3 relations de A3: antérieur (<), synchrone (=) et postérieur (>) est ajoutée incomparable (|). Ce qui donne 2^4=16 disjonctions de relations possibles.

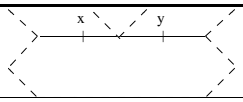
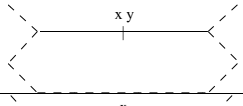
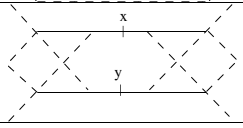
relation r	situation	réciproque r^{-1}
antérieur ($x<y$)		postérieur ($y>x$)
synchrone ($x=y$)		synchrone ($y=x$)
incomparable ($x\|y$)		incomparable ($y\|x$)

Tableau 5: Les 4 relations de A3FP.

Sur la base de cet ensemble, une algèbre est construite. La table de composition entre ces quatre relations est une extension de la table de A3 (au sens où si l'on enlève toute mention de | dans la table c'est celle de A3 qui est obtenue — ceci sera utilisé dans le §4.3 en considérant que l'algèbre A3 est une restriction de celle-ci).

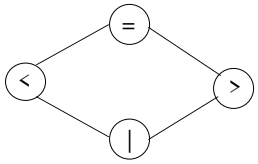


figure 4: Graphe de voisinage pour A3FP.

L'algèbre ainsi obtenue sera nommée A3FP (c'est-à-dire obtenue à partir de A3 avec un temps arborescent vers le Futur et le Passé). À noter que l'algèbre contient deux éléments auto-réciproques (= et |) mais l'élément neutre pour la composition est =. Enfin, le graphe de voisinage obtenu (figure 4) est une extension du graphe pour A3.

o_{3FP}	<	=	|	>
<	<	<	<|	<=|>
=	<	=	|	>
|	<|	|	<=|>	|>
>	<=|>	>	|>	>

Tableau 6: Table de composition de A3FP.

3. Algèbres de relations entre intervalles

Comme signalé plus haut, la notion d'intervalle se transpose facilement des ordres totaux aux ordres partiels. On va construire l'algèbre d'intervalles en considérant que les instants ne sont plus totalement ordonnés mais seulement partiellement ordonnés. Les travaux sur les intervalles conservent leur validité dans ce cadre puisqu'il est légitime de définir un intervalle dans un ordre partiel comme tout se qui est plus petit que la borne supérieure et plus grand que la borne inférieure (si < est la relation d'ordre, l'intervalle (x^-,x^+) est l'ensemble des objets y tels que $x^-<y<x^+$).

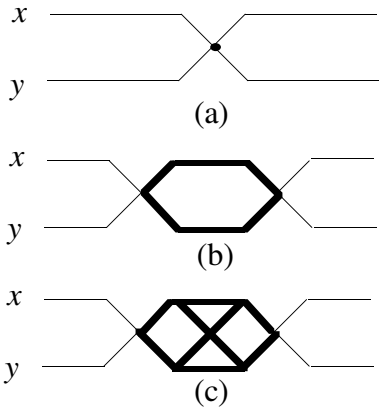


figure 5: Interprétations possibles de x. Les parties en gras correspondent à l'intersection des intervalles x et y.

Cependant, il faut noter une difficulté d'interprétation. En effet, si dans le cas d'un ordre total, un intervalle va s'interpréter comme un segment de droite (un ensemble

linéairement ordonné), ce n'est plus le cas pour un ordre partiel où la métaphore géométrique ne tient plus et où un intervalle est un ensemble de chemins possibles entre ses deux extrémités.
Ainsi, la relation notée x ci-dessous peut correspondre à plusieurs situations telles que décrites dans la figure 5.

Pour obtenir l'algèbre de relations correspondant à l'algèbre de points vue plus haut, il faut tout d'abord obtenir les relations de base et déterminer les relations auto-réciproques (§3.1), puis obtenir le voisinage conceptuel qui y correspond (§3.2) avant d'établir la table de composition (§3.3).

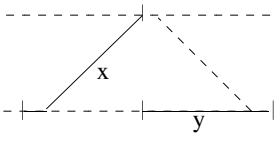
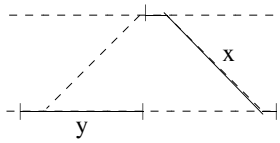
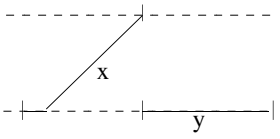
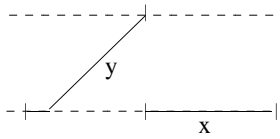
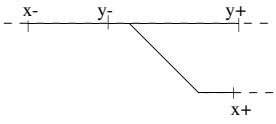
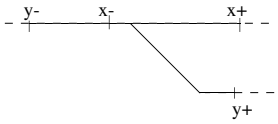
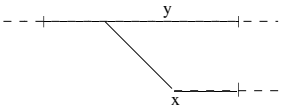
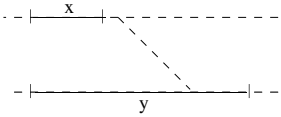
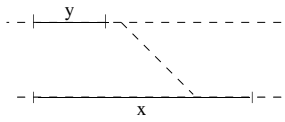
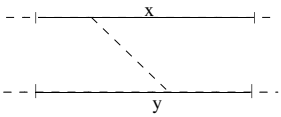
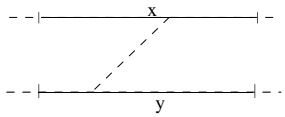
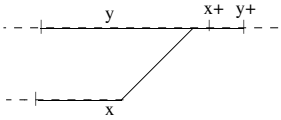
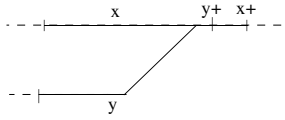
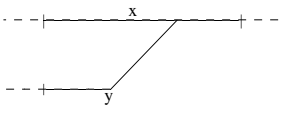
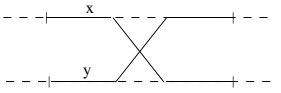
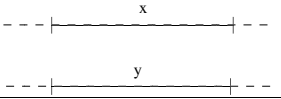
nom	r_1	r_2	r_3	r_4	situation	situation	r_1	r_2	r_3	r_4	nom
b	<	<	<	<			>	>	>	>	b^{-1}
m	<	<	=	<			>	=	>	>	m^{-1}
k	<	<	|	<			>	|	>	>	k^{-1}
h	<	<	|	|			>	|	>	|	h^{-1}
o	<	<	>	<			>	<	>	>	o^{-1}
f^{-1}	<	<	>	=			>	<	>	=	f
p	<	<	>	|			>	<	>	|	p^{-1}
d^{-1}	<	<	>	>			>	<	>	<	d
s	=	<	>	<			=	<	>	>	s^{-1}
e	=	<	>	=							
y	=	<	>	|							
j	|	<	|	<			|	|	>	>	j^{-1}
z	|	<	|	|			|	|	>	|	z^{-1}
q	|	<	>	<			|	<	>	>	q^{-1}
g	|	<	>	=							
x	|	<	>	|							
i	|	|	|	|							

Tableau 7: Les 29 relations de A13FP.

3.1. Relations de base

Lorsque la relation incomparable est ajoutée, il y a potentiellement 4^4=256 relations possibles entre intervalles. Mais de nouvelles formules viennent prendre en compte l'incomparabilité. En effet, il est possible de supprimer toutes les situations où la simple composition permet d'obtenir une valeur unique (donc déterminée) pour une relation alors que celle-ci est indéterminée dans le quadruplet :

1. $\gamma \cup \{x^- \leq y^-, x^- | y^+\}$
2. $\gamma \cup \{x^- | y^+, x^+ \leq y^-\}$
3. $\gamma \cup \{x^+ \leq y^-, x^+ | y^+\}$
4. $\gamma \cup \{x^- \geq y^-, x^+ | y^-\}$
5. $\gamma \cup \{x^- \geq y^+, x^+ | y^-\}$
6. $\gamma \cup \{x^- \geq y^+, x^+ | y^+\}$
7. $\gamma \cup \{x^+ | y^-, x^+ \geq y^+\}$
8. $\gamma \cup \{x^- | y^+, x^+ \leq y^+\}$
9. $\gamma \cup \{x^- | y^-, x^+ \leq y^-\}$
10. $\gamma \cup \{x^- | y^-, x^- \geq y^+\}$

Après application de ces contraintes, il reste les 29 (16+13) relations du Tableau 7. Parmi ces nouvelles relations, quatre (y,g,x et i) sont auto-réciproques contre une seule (e) dans A13. Mais seule cette dernière est toujours le seul élément d'équivalence [7] c'est-à-dire qu'en plus, elle est stable par composition (eoe = e).

La représentation graphique utilisée dans le Tableau 7 pose quelques problèmes. Les deux situations de la figure 6 représentent en fait la même relation mais ceci n'est pas facilement détectable. Le Tableau 10 présente une autre manière qui permet l'identification des situations mais qui ne présente pas l'ordre des éléments de manière satisfaisante (il est délicat de se souvenir que on ne peut parcourir les cercles que de gauche à droite). Les deux ont leurs avantages et leurs inconvénients et seront utilisées.

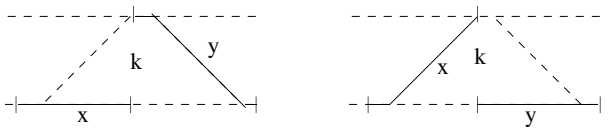


figure 6: Deux instanciations de la relation (k) très difficiles à identifier.

3.2. Voisinages conceptuels

Il faut faire une première remarque par rapport à la transposition des voisinages dans le cadre des espaces partiellement ordonnés: on remarque que la transformation C fait intervenir des notions (centre de gravité) qui ne sont pas définies dans le cadre des ordres partiels (et des espaces non métriques). Nous retiendrons donc toujours A comme type de modification.

Il est envisageable de transposer simplement la méthode de [9] fondée sur le produit des ordres sur les composant des intervalles. Il ne faudrait plus alors plonger l'ordre obtenu dans un ordre total mais au contraire conserver jusqu'au bout la structure d'ordre partiel. La méthode pour obtenir le graphe de voisinage devient la suivante:

1. transformer le graphe de voisinage sur A3FP en un ordre (partiel);
2. considérer l'ordre produit (quatre fois) de A3FP réduit aux quadruplets qui représentent des relations autorisées dans A13FP;
3. le graphe de voisinage est alors le graphe non-ordonné correspondant à la réduction transitive de l'ordre obtenu.

Le cœur de l'algorithme est le point 2 qui consiste en fait à définir le voisinage sur l'algèbre d'intervalles comme devant être essentiellement compatible avec cet ordre. Le choix de l'ordre au point 1 est donc fondamental avec cette méthode car c'est lui qui reflète la déformation subie par l'intervalle.

Cette option permet de trouver 56 voisinages. Cependant, comme on peut le constater sur la figure 7, A13FP permet que deux quadruplets représentent des relations voisines alors qu'ils diffèrent sur deux positions. Le plus souvent il existe une relation voisine des deux autres et comprise entre les deux autres dans l'ordre considéré. Ainsi, ce voisinage est éliminé par la réduction transitive.
Relacher la contrainte de réduction transitive n'est pas satisfaisante. En effet, ceci introduit alors des voisinages non valides, même dans un temps partiellement ordonné, tels que « m-s ».

Ci-dessous, la construction des voisinages est justifiée par rapport à la nature d'algèbre d'intervalles et le type de transformation considérée. Comme une seule extrémité est déplacée, cela ne permet de modifier simultanément que deux relations dans les quadruplets (celles impliquant l'extrémité concernée). Les autres ne pouvant être affectées.
Dans le cas arborescent, il est possible que l'extrémité déplacée soit incomparable avec les deux autres extrémités et devienne d'un coup comparable avec elles (voir figure 7). Plus généralement, si une extrémité incomparable devient comparable, il est possible que l'autre relation impliquant le nœud subissant la transformation change (toujours pour un voisin). Par ailleurs, ils ne peuvent pas changer de telle sorte que l'objet apparaisse simultanément des deux côtés de l'intervalle, ni au milieu de l'intervalle car il aurait alors fallu que l'extrémité soit déjà en relation (comparable) avec l'une des deux autres extrémités.
L'algorithme spécifique à utiliser pour obtenir le voisinage conceptuel doit donc considérer comme voisins d'une relation r:

- tous les quadruplets valides qui diffèrent de r par une seule position (r_i, i=1..4) et dont la différence est le remplacement d'une relation entre instants par une relation voisine (dans A3FP);
- tous les quadruplets valides qui diffèrent de r par deux positions (impliquant une extrémité commune et dont la différence est le remplacement par une relation voisine), tels que l'une des positions était occupée par « | » et que l'autre soit était « | » et évolue dans le même sens, soit

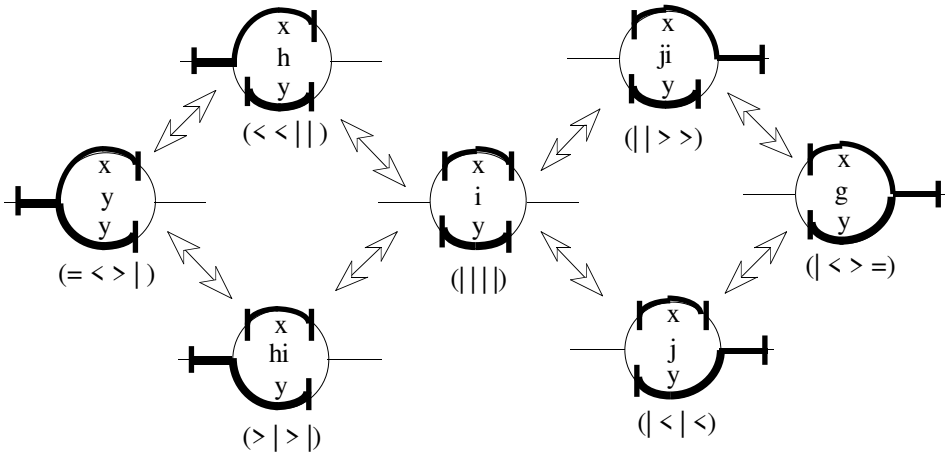


figure 7: Un ensemble de relations voisines malgré deux changements dans le quadruplet représentant les deux relations (au lieu d'une dans A13).

ne l'était pas et évolue vers « = » (c'est-à-dire un voisin qui ne soit pas « | »).

Le voisinage résultant est donné sur la figure 8.

3.3. Table de composition

La table de composition s'obtient simplement à l'aide de la multiplication matricielle comme elle est obtenue pour A13 (voir §1.4).

On vérifie bien entendu que toutes les cases de la table de composition obtenue constituent des voisinages pour la nouvelle algèbre.

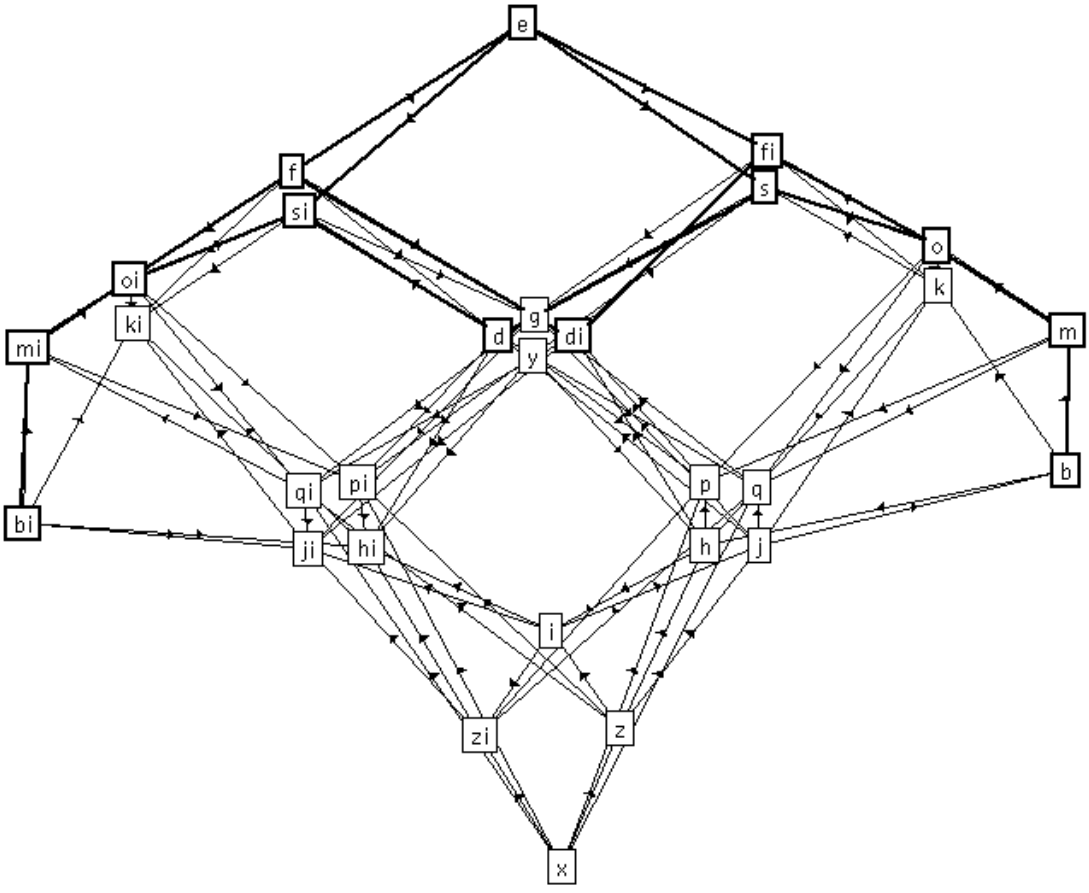


figure 8: Graphe de A-voisinage pour A13FP. Le graphe de A13 est indiqué en gras. Le graphe a été tracé à l'aide d'un algorithme de recuit simulé [3] en utilisant la visualisation de celui-ci en trois dimensions. Sur ce tracé on peut surtout remarquer les rectangles vides dénotant des groupes de relations non voisines.

4. Futur et passé arborescents

Les algèbres considérées jusqu'à présent ne prennent en compte que la structure d'ordre partiel. Cependant, il est possible d'obtenir des algèbres plus adaptées à la structure graphique plaquée sur le temps. On s'intéresse ici au cas où le temps est arborescent car c'est le cas le plus traité en informatique.
Ce cadre est aussi plus intuitif car les intervalles correspondent de nouveau à la notion de segment.
De la même manière que précédemment, l'algèbre d'instants sera d'abord rapidement étudiée (§4.1) avant de passer à l'algèbre d'intervalles (§4.2). L'étude sera très rapide car la façon de procéder est grossièrement la même que précédemment. On observera non seulement les effets de symétrie alors mis en évidence dans l'algèbre d'intervalles précédente mais on examinera les relations qu'entretiennent entre eux les différents systèmes étudiés ici (§4.3).

4.1. Algèbres d'instants F et P

Il est possible de considérer les algèbres d'instants ne manipulant que l'arborescence dans le futur (A3F) ou le passé (A3P). Dans les deux cas, les relations de base, la réciprocité et les relations auto-réciproques restent les mêmes. De même, le graphe de voisinage est exactement le même.

o_{3P}	<	=	|	>
<	<	<	|	<=|>
=	<	=	|	>
|	<|	|	<=|>	|
>	<=>	>	|>	>

Tableau 8: Table de composition pour A3P.

Par contre, les tables de composition sont différentes (voir Tableau 8 et Tableau 9). La symétrie (par rapport à la diagonale) du Tableau 2 et celle du Tableau 6 est rompue dans ces deux tables qui, par contre, sont complémentaires par rapport à ces tableaux.

o_{3F}	<	=	|	>
<	<	<	<|	<=>
=	<	=	|	>
|	|	|	<=|>	|>
>	<=|>	>	|	>

Tableau 9: Table de composition pour A3F.

4.2. Algèbres d'intervalles A13F et A13P

Les algèbres d'intervalles pour le temps arborescent dans le passé (A13P) et le futur (A13F) seulement peuvent être obtenues avec les mêmes méthodes que précédemment.
Cependant, la structure particulière du domaine temporel a une incidence sur les relations de base de l'algèbre. En effet, certaines contraintes viennent s'appliquer en plus de celles qui ont été considérées lors de la génération de A13FP. En fait, chacune d'entre elles complète un sous-ensemble des contraintes précédentes. Pour A13F on a (ici # signifie {<,=,>}, c'est-à-dire comparable):

1. $\gamma \cup \{x^- | y^-, x^+ \# y^+\}$
2. $\gamma \cup \{x^- | y^-, x^- \# y^+\}$
3. $\gamma \cup \{x^- | y^-, x^+ \# y^-\}$
4. $\gamma \cup \{x^+ | y^-, x^+ \# y^+\}$
5. $\gamma \cup \{x^- | y^+, x^+ \# y^+\}$

et pour A13P:

1. $\gamma \cup \{x^- | y^+, x^- \# y^-\}$
2. $\gamma \cup \{x^+ | y^-, x^- \# y^-\}$
3. $\gamma \cup \{x^+ | y^+, x^- \# y^+\}$
4. $\gamma \cup \{x^+ | y^+, x^+ \# y^-\}$
5. $\gamma \cup \{x^+ | y^+, x^- \# y^-\}$

Ces combinaisons sont contradictoires parce que la linéarité dans le passé (resp. futur) fait qu'il est impossible que les débuts (resp. fin) de deux intervalles soient incomparables si leurs fins (resp. début) sont comparables.

L'applications de ces contraintes donnent lieu à deux ensembles de 19 relations de base chacun. Ils ne contiennent pas les relations qui nécessitent un branchement dans le passé et le futur à la fois:

$$k, k^{-1}, z, z^{-1}, x.$$

De plus, pour A13F il faut ôter:

$$j, j^{-1}, q, q^{-1}, g$$

et pour A13P il faut ôter:

$$h, h^{-1}, p, p^{-1}, y.$$

La relation i a donc un statut particulier puisqu'elle nécessite une possibilité de branchement mais sans en imposer l'orientation. Ceci est résumé sur le Tableau 10.

Notons qu'il est possible de décomposer les relations obtenues suivant un axe passé/futur et non plus la simple réciprocité. Lorsque le graphe de voisinage est représenté en trois dimensions, on se rend compte que le graphe est symétrique par rapport au « plan » $e\text{-}(g\text{-}y)\text{-}(d\text{-}d^{-1})\text{-}x\text{-}i$ qui correspond à la symétrie des situations mais aussi par rapport au « plan » b-m-o-e-x-i qui correspond à la symétrie du temps. On retrouve bien les relations à ôter à partir du Tableau 10 qui présente les relations de A13FP suivant cette symétrie. Il faut noter que dans les relations de Allen, la symétrie entre le futur et le passé se confond presque avec celle entre une relation et sa symétrique. Ce type de symétrie peut être utilisée pour compacter les tables de composition [6] ou pour réduire le nombre d'opérateurs nécessaires dans une interface d'édition de documents multimédia comme c'est fait dans [16].
Les relations de composition peuvent être obtenues comme précédemment.

4.3. Confrontation des algèbres du temps arborescent

Il est possible de définir la restriction d'une algèbre de relations comme une algèbre se limitant à prendre en compte un sous-ensemble des relations de la première. Une restriction peut être obtenue en:

- limitant l'ensemble des relations à celui spécifié par la restriction;
- restreignant la relation de voisinage à cet ensemble;
- restreignant la loi de composition à cet ensemble (c'est-à-dire en supprimant les entrées contenant un élément n'y appartenant pas et en supprimant du résultat de la composition les éléments n'y appartenant pas).

Dans le cas général, la restriction n'a pas de sens particulier. Mais si l'on applique à A3FP, A3F ou A3P (resp. A13FP, A13F ou A13P) la restriction aux relations de l'algèbre A3 (resp. A13), on obtient cette dernière algèbre. Aucune autre de ces algèbres ne peut être obtenue par restriction d'une autre.

Une question intéressante se pose alors: le problème de la satisfaisabilité d'un ensemble d'assertions dans A13 est NP-complet [15]. Dans A3, ce problème se résout en $O(n^3)$ par un algorithme de cohérence de chemins. Qu'en est-il des algèbres pour un temps arborescent? Il serait intéressant de savoir si elles introduisent une complexité supplémentaire. Ce ne serait pas surprenant vu qu'un certain indéterminisme s'insère dans les possibles structures temporelles (il est toujours possible d'ajouter des branches). Mais ce n'est pas acquis.

En particulier, la satisfaisabilité dans A13FP (resp. A13F, A13P) est aussi NP-complète vu que le problème de la satisfaisabilité dans A13 y est inclus et que le problème est dans NP (une solution est vérifiable polynomialement). Un travail supplémentaire consiste donc à trouver une sous-classe de ces algèbres qui soit moins complexe (et, en particulier, si l'algèbre A3FP est encore polynomiale, ce sera le cas de la sous-classe pointisable de A13FP: 2326 relations parmi les 536 870 912 que compte A13FP contre 187 sur 8192 pour A3).

5. Travaux semblables

La seule algèbre de relations entre intervalles pour un temps arborescent publiée est celle de [2] (nommée A24F ci-après). Elle diffère cependant notablement de celle présentée ici en ce qu'elle n'est pas une algèbre d'intervalles (au sens utilisé ici). En effet, les relations dépendent du point de branchement z entre deux intervalles x et y caractérisé par $z=\text{glb}(x^+,y^+)$ (resp. $z=\text{lub}(x^-,y^-)$) si le branchement est dans le futur (resp. passé). Le Tableau 11 présente les 7 relations de base ajoutées à A13 (3 sont auto-réciproques: U, pS et T) et leur traduction dans

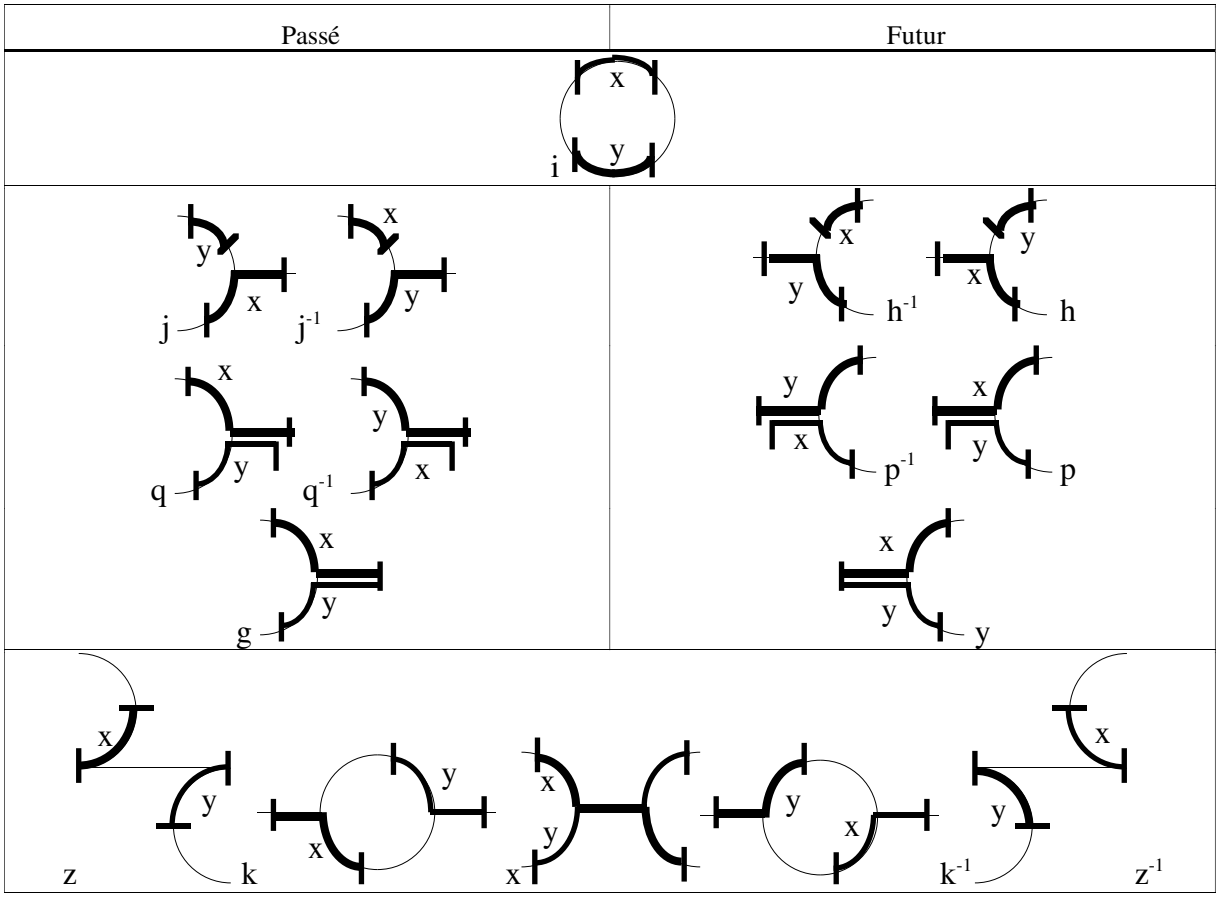


Tableau 10: Organisation suivant l'arborescence du temps des 16 relations spécifiques à A13FP.

A13F.

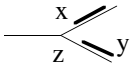
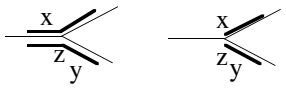
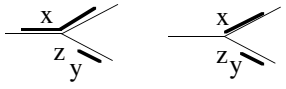
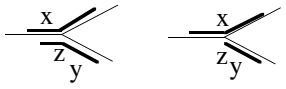
A24F	Situation	A13F
U		i
pS+T		y
pP+A		h^{-1}
pO+pM		p

Tableau 11. Les relations de A24F ajoutées à A13.

Le travail présenté ici est donc différent. Cependant un article plus récent [13] d'une partie des auteurs signale, sans les fournir explicitement, une algèbre arborescente en 19 relations et une algèbre pour l'ordre partiel en 29 relations.

6. Conclusions

Une extension des algèbres d'instants et d'intervalles au cas d'un domaine temporel régi par un ordre partiel a été présentée. Elle s'applique aux domaines temporels arborescents vers le futur ou le passé. Bien entendu tout ce qui s'exprime dans de tels domaines n'est pas forcément exprimable sous forme d'intervalles mais il faut noter qu'une « algèbre de segments » dans ces domaines serait contenue dans l'algèbre d'intervalles A13FP et qu'elle coïnciderait avec A13F et A13P dans le cas du temps arborescent. On peut même conjecturer qu'il y a coïncidence dans le premier cas puisque tous les exemples donnés dans le Tableau 7 ne considèrent que des segments.
Une structure encore plus adaptée sera sans doute une disjonction d'intervalles incomparables (c'est-à-dire reliés par i). Ceci permettrait de représenter différentes positions d'un même objet dans différents scenarii temporels.
Au delà de l'application au cas de l'ordre partiel, ce travail aura développé les outils nécessaires à l'obtention des graphes de voisinages par passage aux intervalles et mis en évidence la symétrie passé/futur dans le contexte de l'ordre partiel et le rapport de restriction entre les différentes algèbres obtenues (futur et passé, futur, passé et linéaire).
Les résultats présentés ici, même s'ils se présentent sous la forme de tables et de graphes ont le statut de propositions démontrées. Les démonstrations ont été faites à l'aide d'un ensemble de programmes Maple [12] manipulant les algèbres de relations que l'on peut obtenir à partir de la page

`http://www.inrialpes.fr/sherpa/pera.html`.

Bibliographie

[1] J. Allen, Maintaining knowledge about temporal intervals, *Communications of the ACM,* Vol. 26, pp. 832-843, 1983.

[2] F. Anger, P. Ladkin, R. Rodriguez, Atomic temporal interval relations in branching time: calculation and application, Actes 9th SPIE conference on applications of artificial intelligence, Orlando (FL US), pp. 122-136, 1991.

[3] U. Erlingsson, M. Krishnamoorthy, Interactive graph drawing on the world wide web, Rapport de recherche 13, Rensselaer polytechnic institute, Troy (NY US), 1996.

[4] A. Emerson, Temporal and modal logic, dans J. Van Leeuwen (éd.), Handbook of theoretical computer science, volume B, Elsevier, Amsterdam (NL), pp. 995-1072, 1990.

[5] J. Euzenat, An algebraic approach to granularity in qualitative time and space representation, Actes 14th IJCAI, Montréal (CA), pp. 894-900, 1995.

[6] C. Freksa, Temporal reasoning based on semi-intervals, *Artificial intelligence,* Vol. 54, pp. 199-227, 1992.

[7] R. Hirsch, Relation algebras of intervals, *Artificial intelligence*, Vol. 83, pp. 267-295, 1996.

[8] N. Layaïda, Madeus: système d'édition et de présentation de documents structurés multimédia, Thèse d'informatique, université Joseph-Fourier, Grenoble (FR), 1997.

[9] G. Ligozat, Towards a general characterization of conceptual neighborhoods in temporal and spatial reasoning, dans Frank Anger, Rasiah Loganantharaj (éds.), actes 12th AAAI workshop on spatial and temporal reasoning, Seattle (WA US), pp55-59, 1994.

[10] K. Nökel, Convex relations between time intervals, Rapport de recherche 17, SEKI, Kaiserslautern (DE), 1988

[11] D. Randell, A. Cohn, Z. Cui, Computing transitivity tables: a challenge for automated theorem provers, *Lecture notes in computer science*, Vol. 607, pp. 786-790, 1992.

[12] D. Redfern, *The Maple handbook: Maple V release 3*, Springer-Verlag, New-York (NY US), 1994.

[13] R. Rodriguez, F. Anger, Reasoning with unsynchronized clocks, Actes IJCAI workshop on spatial and temporal reasoning, Montréal (CA), pp. 23-35, 1995.

[14] B. Shults, B. Kuipers, Proving properties of continuous systems: qualitative simulation and temporal logic, *Artificial intelligence*, Vol. 92, pp. 91-129, 1997.

[15] M. Vilain, H. Kautz, Constraint propagation algorithms for temporal reasoning, Actes 5th AAAI, Philadelphia (PA US), pp. 377-479, 1986.

[16] T. Wahl, K. Rothermel, Representing time in multimedia systems, Actes 1st IEEE international conference on multimedia computing and systems, Boston (MA US), pp. 538-543, 1994.