Ensimag 2A – automne 2007
Jérôme Malick

Résumé détaillé du cours d'optimisation

Titre plus précis : Optimisation continue - théorie et algorithmes

Objectif du cours :
- introduire les outils mathématiques de base,
- présenter les idées algorithmiques de base,
- donner une première expérience de modélisation et une première expérience numérique.

Le cours en un coup d'oeil :

1. Introduction, motivations
   1.1 Qu'est ce qu'un problème d'optimisation ?
   1.2 Où apparait l'optimisation ?
   1.3 Qu'allons-nous faire ce semestre ?
2. Maths pour l'optimisation
   2.1 Introduction, questions naturelles
   2.2 Existence, unicité, convexité
   2.3 Conditions d'optimalité
   2.4 Dualité lagrangienne
3. Algorithmique de l'optimisation
   3.1 Généralités sur les méthodes numériques
   3.2 Méthodes pour l'optimisation différentiable sans contraintes
   3.3 Méthodes pour l'optimisation différentiable avec contraintes
   3.4 Méthodes pour l'optimisation non-différentiable
4. Étude de cas réels
   4.1 EDF : gestion de la production électrique
   4.2 Finance : calibration du modèle de change
   4.3 Météo : identification des conditions initales
   4.4 Finance : calibration du risque d'un portefeuille

et ci-après, le résumé détaillé (3 pages)...

1 Introduction, motivations

1.1 Qu'est ce qu'un problème d'optimisation ?

- Introduction générale. Exemples : optimisation quadratique, linéaire
- Une classification : optimisation continue, optimisation combinatoire, commande optimale
- Objectifs du cours

1.2 Où apparait l'optimisation ?

- Introduction. Un schéma du processus de modélisation $\rightarrow$ TP1
- Exemple : agence matrimoniale ($\rightarrow$ problème d'affectation)
- Exemple : gestion de portefeuille ($\rightarrow$ problème quadratique)
- Réécriture des problèmes : pourquoi, comment (changement/ajout de variable, dualité)

1.3 Qu'allons-nous faire ce semestre ?

- Plan du cours, presentation rapide des TPs
- Remarques générales :
  - Éléments clé d'une méthode numérique d'optimisation ($\rightarrow$ besoin de maths)
  - Notation, convention (min/max, dimension finie)
  - Prérequis (Calcul diff ! $\rightarrow$ TD1)

2 Maths pour l'optimisation

2.1 Introduction, questions naturelles

- Problème bien posé ? exemples
- Existe-il une « solution » ? définition min local, global, exemples ($\rightarrow$ besoin de compacité)
- Structure de l'ensemble des solutions ? unicité ? ($\rightarrow$ besoin de convexité)
- Propriétés de la solution ? nécessaires/suffisantes ? ($\rightarrow$ condition d'optimalité)

2.2 Existence, unicité, convexité

Existence et compacité

- Généralités sur l'existence
- Cas évident : C fini – Exemple : $\{0, 1\}$-programming
- Cas important : C compact – Exemple : un problème linéaire
- Corollaire : C fermé + f coercive – Exemple : fonction quadratique
- Généralités sur la structure des solutions

Éléments d'analyse convexe I (rappels)

- Définition ensemble convexe, exemples, contre-exemples
- Envelope convexe (propriétés au TD3)
- Définitions fonction convexe, exemples (fonctions affines, quadratiques)
- Notions reliées : domaine de f, ensemble de niveau, fonction strictement convexe, fortement convexe
- Prop : fonction sup convexe – Exemple : fonction valeur propre max
- Caractérisations des fonctions convexes différentiables, exemples (fonction quadratique, entropie)
- Convexité et optimisation : min local/global ; ens des min convexe ; stricte convexité donne unicité

2.3 Conditions d'optimalité

Cas différentiable sans contrainte

- Conditions nécessaires du 1er ordre et 2e ordre – Exemples et contre-exemples simples
- Conditions suffisantes
- Caractérisation (cas convexe) – Exemple : fonction quadratique fortement convexe

Cas différentiable avec contraintes d'égalité

- Théorème des extrema liés – Exemples et contre-exemples simples
- Interprétation géométrique et interprétation analytique
- Exemple : minimiser une fonction quadratique sur un espace affine
- Exemple : minimiser une fonction quadratique sur la sphère unité (formule variationnelle de $\lambda_{\min}$)

Cas différentiable avec contraintes d'inégalité

- Théorème de KKT (1er ordre – second ordre évoqué)
- Condition de qualification, dessins
- Cas convexe : suffisance et qualification globale
- Exemple simple : min une forme linéaire sur la boule unité

Cas non-différentiable + éléments d'analyse convexe II (régularité)

- Cas intermédiaire : f diff et C convexe – Exemple : projection sur un convexe fermé (en dim finie)
- Introduction de la non-différentiabilité de f, besoin d'un peu plus d'analyse convexe
- Régularité des fonctions convexes (rapidement) : local lipschitz, différentiable p.p.
- Objet du 1er odre : sous-différentiel. Exemples simples.
- Convexité et optimisation, caractérisation

2.4 Dualité lagrangienne

Problème dual, lagrangien

- Introduction générale, objectifs, interprétation « économique »
- Introduction pratique du problème dual
- Introduction théorique du problème dual, premières propriétés
- Exemples : problème linéaire (remember 1A) + EDF
- Généralisation au cas des inégalités et d'un min

« Théorie » de la dualié

- Premiers liens entre primal et dual $\rightarrow$ saut de dualité
- Convexité de la fonction duale – Prop : sous-gradients de la fonction duale $\rightarrow$ filling property
- Lien en primal et dual en présence de convexité
- Connexions avec les multiplicateurs des conditions optimalité (cas convexe différentiable)
- Exemple : calibration des matrices de corrélation

3 Algorithmique de l'optimisation

3.1 Généralités sur les méthodes numériques

- Comment connaissons-nous f ? oracle pauvre, riche, exemples

- Structure générale d'un algorithme d'optimisation
- 4 points : calcul de x_{k+1}, choix de x_0, choix du critère d'arrêt, gestion des erreurs numériques
- 2 idées fortes : **modèle (local)** de la fonction + **stabilisation (globale)**

3.2 Méthodes pour l'optimisation différentiable sans contraintes

Introduction

- Méthodes « de descente » – direction de descente, pas de descente,
- Critère d'arrêt $\rightarrow$ lien avec le calcul de $F(x) = 0$

Recherche linéaire

- Premiers exemples, objectifs
- Principe, structure de la recherche, réglages (règle de Wolfe) $\rightarrow$ TP3
- Théorème de convergence

Direction de descente

- Modèle (local) linéaire $\rightarrow$ direction de gradient
- Avantages (simple !), inconvénients (lente car manque d'information globale) $\rightarrow$ TP2
- Modèle (local) quadratique $\rightarrow$ direction de Newton, théorème de convergence quadratique
- Inconvénients (besoin du 2e ordre, $\nabla^2 f(x)$ inversible ? et à inverser ! et il faut globaliser !)
- Amélioration : Quasi-Newton $\rightarrow$ TP4
- Choix de W_k, propriétés, théorème de convergence superlinéaire

3.3 Méthodes pour l'optimisation différentiable avec contraintes

(cette section sera plus ou moins détaillée en fonction de niveau d'avancement du cours)

- Cas simple : contraintes d'égalité linéaire
- Cas différentiable : méthodes SQP
- Sinon : se ramener á du « sans contraintes » – techniques : élimination, pénalisation, barrière...
- Exemple : optimisation conique

3.4 Méthodes pour l'optimisation non-différentiable sans contraintes

- Difficultés du non-différentiable (descente ? test d'arrêt ?)
- Situation : simulateur « pauvre » donnant la valeur et un sous-gradient (simulateur riche en 3A)
- Méthode de sous-gradients, avantages (simple !), inconvénients (lente en théorie et pratique, choix de t_k, pas de critère d'arrêt) $\rightarrow$ TP5
- Méthode des plans sécants, avantages (modèle polyhédral, critère d'arrêt), inconvénients (problème de l'existence de λ_{k+1}, very bad convergence)
- Méthode de faisceaux, stabilisation quadratique $\rightarrow$ TP6

4 Étude de cas réels

($\rightarrow$ mettre en musique tout ce qu'on a vu avant – de la modélisation à la résolution)

1. EDF : gestion de la production électrique
2. Finance : calibration du modèle de change
3. Météo : identification des conditions initales
4. Finance : calibration du risque d'un portefeuille