Master Informatique de Grenoble – automne 2015
Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation (ROCO)
Cours "programmation mathématique et applications industrielles"
Jérôme Malick

Feuille d'exercice numéro 0 – Un peu d'analyse convexe

Exercice 1 – (Rappels sur les) définitions. Travaillez les transparents de cours de Steve Boyd, professeur à Stanford University, sur les
– ensembles convexes
`http://www.stanford.edu/class/ee364a/lectures/sets.pdf` (jusqu'à la page 13),
– fonctions convexes
`http://www.stanford.edu/class/ee364a/lectures/functions.pdf` (jusqu'à la page 22).
Puis faire après les deux quiz en ligne :
– `http://www.stanford.edu/class/ee364a/quizzes/sets.html`
– `http://www.stanford.edu/class/ee364a/quizzes/functions.html`
Je vous conseille aussi de regarder les vidéos correspondantes :
– `http://www.stanford.edu/class/ee364a/videos/video02.html`
– `http://www.stanford.edu/class/ee364a/videos/video03.html`

Exercice 2 – Matrices SDP. Soit $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives

$$\mathcal{S}_n^+ = \left\{ X \in \mathcal{S}_n : w^\top X w \geqslant 0, \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est un cône convexe fermé.

Exercice 3 – Enveloppe. L'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est définie comme le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant A – que l'on note conv A. Montrer que

$$\operatorname{conv} A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, \kappa \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \geqslant 0, \text{ tels que } x = \textstyle\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, a_i \text{ et } \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1\}.$$

[Pour info : le théorème de Caratéodory montre qu'en fait on peut se restreindre à $\kappa = n+1$].

Exercice 4 – Fonctions supports. Calculer la fonction-support

$$\sigma_C(x) := \max_{y \in C} x^\top y \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n$$

pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants :
a) C la boule euclidienne de rayon 1 (faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$) ;
b) $C = [a, b]$ le segment joinant deux points a et b dans $\mathbb{R}^n$;
c) $C = (\mathbb{R}^+)^n$ l'orthant positif ;

Exercice 5 – Fonction conjuguée, exemples. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction quelconque. On rappelle que le domaine de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\},$$

et que $f^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction "conjuguée" de f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(x) = \sup_{y \in \operatorname{dom} f} \left\{ x^\top y - f(y) \right\}.$$

a) Montrer que $f_1^*(x) = f_1(x)$ pour $f_1(x) = \|x\|^2/2$ la demi-norme euclidienne au carré sur $\mathbb{R}^n$.
b) Quelle est la conjuguée d'une fonction support ?