Master Informatique de Grenoble – automne 2015
Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation (ROCO)
Cours "programmation mathématique et applications industrielles"
Jérôme Malick

Feuille d'exercice 1 – dualité lagrangienne

Exercice 1 – Petits exemples de dualité non-convexe. Considérons le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \max \quad \varphi(x) = x \\ \quad x \leqslant 0,\ x \in \{-2, 1\}. \end{cases}$$

a) Écrire le problème dual pour la dualisation de la contrainte $x \leqslant 0$. Montrer que le saut dual est 2.

b) Résoudre le problème convexifé (avec $x \in [-2, 1]$). Vérifier que la valeur optimale convexifée est égale à la valeur duale optimale.

c) Recommencer en prenant $\varphi(x) = -x^2$. A-t-on la même égalité finale ?

Exercice 2 – Petits exemples de saut duaux.

a) Considérons le problème linéraire à variable boolénne (dans $\mathbb{R}$) suivant

$$\begin{cases} \min \quad \varphi(x) = x \\ \quad x = 0,\ x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Écrire le problème dual pour la dualisation de la contrainte $x = 0$; que vaut le saut dual ? Même question avec le problème où la contrainte $x \in \{-1, 1\}$ est remplacée par la contrainte $x \in [-1, 1]$.

b) Considérons le problème non-linéaire dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \min \quad \varphi(x) = 1 \\ \quad 1/(1+x) \leqslant 0,\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Écrire le problème dual pour la dualisation de la contrainte $1/(1+x) \leqslant 0$; que vaut le saut dual ? Même question avec le problème où la contrainte $x \geqslant 0$ est renforcée en la contrainte $M \geqslant x \geqslant 0$.

Exercice 3 – Max-cut. Considérons un graphe dont les noeuds sont numérotés de 1 à n et les arêtes ont des poids $w_{ij} \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème max-cut (séparer les noeuds en deux groupes tels que la somme des poids des arêtes coupées soit maximum).

a) On associe à chaque noeud : $x_i = 1$ si on met i dans le premier groupe et $x_i = -1$ dans le second. Modéliser le problème comme un problème quadratique sous les contraintes ${x_i}^2 = 1$.

b) Appliquer le méchanisme de la dualité lagrangienne pour écrire le problème dual. [Indice : il faudra introduire une contrainte du type $X \in \mathcal{S}_n^+$].

Exercice 4 – Reformulation. Avec les notation du cours, on considère le problème

$$\begin{cases} \max \quad \varphi(x) \\ \quad c(x) = 0,\ x \in X. \end{cases}$$

On ne modifie pas le problème en "poussant l'objectif dans les contraintes", c'est-à-dire

$$\begin{cases} \max \quad s \\ \quad s \leqslant \varphi(x),\ c(x) = 0,\ x \in X. \end{cases}$$

Montrer que cette reformulation ne modifie pas non plus le problème dual. [Indication : considèrer les deux cas où on dualise ou pas la contrainte $s \leqslant f(x)$]

Exercice 5 – Dualiser d'autres contraintes. Avec les notation du cours, on considère le problème

$$\begin{cases} \max \quad \varphi(x) \\ \quad x \in X \\ \quad c(x) \in B \end{cases}$$

où B est une partie de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'on a un oracle qui résout $\theta(u) := \max_{x \in X} \varphi(x) - u^\top c(x)$.

a) Introduisant une variable supplémentaire, écrire le dual du problème.

b) Appliquer le résultat avec $B = \{0\}$, $B = \mathbb{R}^n_+$ et B la boule euclidienne de rayon ε.

Exercice 6 – Dualiser avec une pénalisation. Avec les notation du cours, on considère le problème

$$\begin{cases} \max & \varphi(x) - V(c(x)) \\ & x \in X \end{cases}$$

où $V \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction positive et nulle à l'origine. On suppose qu'on a un oracle qui résout $\theta(u) := \max_{x \in X} \varphi(x) - u^\top c(x)$.

a) Introduisant une variable supplémentaire, écrire le dual du problème.

b) Appliquer le résultat avec $V = -\|\cdot\|^2$ et $V = -\|\cdot\|_1$.

Exercice 7 – Bi-conjuguée et convexification : exemple sur un problème avec contraintes d'intégrité. On considère le problème suivant dans $\mathbb{R}^2$ (p représentant des productions et d une demande)

$$F(d) := \begin{cases} \min & 5p_1 + 10p_2 \\ & p_1 + p_2 \geqslant d \\ & p \in \{0, 3\} \times [0, 1] \end{cases} \tag{P_d}$$

a) Calculer en fonction de $d \in [0, 4]$, la solution optimale $p(d)$. Tracer le graphe de F.

b) Introduisant le lagrangien

$$L_0(p; u) := -5p_1 - 10p_2 - u(-p_1 - p_2)\,,$$

on va commencer par dualiser le problème (P_0). Calculer en fonction de $u \geqslant 0$ le minimum p^u du lagrangien. Tracer le graphe de la fonction duale résultante $\theta_0(u)$.

c) Former maintenant le dual de (P_d), et exprimer sa fonction duale θ_d à partir de θ_0. Quel est le minimum de θ_d pour $d = 2$?

d) En s'aidant du graphe de F, calculer la conjuguée F^* ; constater que F^* est θ_0 (au signe près).

e) En s'aidant du graphe de θ_0, calculer la conjuguée θ_0^* ; la tracer et constater que c'est l'enveloppe convexe de F (au signe près).