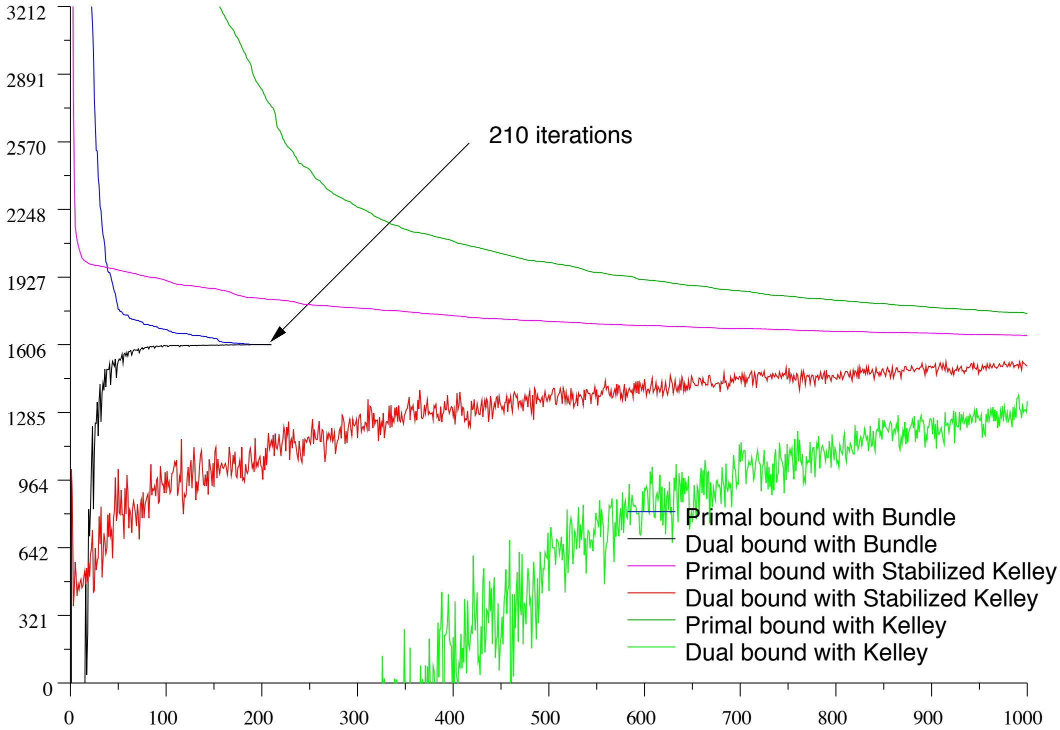
Master Informatique de Grenoble – automne 2015
Recherche Opérationnelle, Combinatoire et Optimisation (ROCO)
Cours "programmation mathématique et applications industrielles"
Jérôme Malick

# Feuille 2 – Décomposition lagrangienne

Remarque préliminaire : voici une illustration numérique des algorithmes vus en cours. La figure ci-dessous compare l'algorithme des faisceaux avec deux variantes de la méthode de Kelley pour résoudre un problème d'optimisation convexe non-differentiable (qui est la relaxation lagrangienne du problème de voyageur de commerce "gr120"). Les trois algorithmes maximisent la fonction duale et génèrent à chaque itération une solution primale associée. Plus d'infos et d'exemples dans l'article Comparison of bundle and classical column generation proposé en lecture.




**Exercice 1 – Génération de colonnes.** Soient $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $X$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ (pour fixer les idées : un polytope). On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & c^\top x\,, \\ & x \in X\,, \\ & Ax = b \in \mathbb{R}^m\,. \end{array} \right. \tag{1}$$

Supposons qu'il est facile de maximiser les fonctions linéaires sur $X$ ; appelons formellement `optimX` la fonction "boite noire" qui résout cette maximisation.

**a)** On dualise la contrainte $Ax = b$ ; écrire le lagrangien $L(x; u)$, $u \in \mathbb{R}^m$ étant la variable duale.

**b)** Montrer que, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ étant fixé, maximiser le lagrangien selon $x$ admet au moins une solution.

**c)** Écrire un oracle de la fonction duale qui calcule la valeur de la fonction duale ainsi qu'un sous-gradient, en utilisant `optimX`.

On suppose maintenant que, pour $K$ variables duales $u_1, \ldots, u_K$, on a calculé des variables primales correspondantes $x_1, \ldots, x_K$ (c'est-à-dire : $x_i$ maximise $L(\cdot, u_i)$ sur $X$). On s'intéresse alors au calcul de $u_{K+1}$ et $x_{K+1}$.

**d)** Écrire le problème qui correspond à une itération de la méthode des plans sécants pour minimiser la fonction duale. Montrer qu'il peut être mis sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\min \quad r\,,\\ \quad (u,r) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}\,,\\ \quad r \geqslant c^\top x_i - u^\top (Ax_i - b)\,, \quad i = 1, \ldots, K\,.\end{array}\right. \tag{2}$$

**e)** Mettre (2) sous la forme du cours et écrire le lagrangien $\widetilde{L}((\lambda,r);\alpha)$ (avec un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^K$ de variables duales).

**f)** Quelles conditions doit vérifier $\alpha$ pour garantir que

$$\max_{(u,r)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}} \widetilde{L}((u,r);\alpha) < +\infty \ \ ?$$

En déduire la fonction duale associée.

**g)** Écrire le problème dual associé. En donner une interprétation par rapport à (1).

**Exercice 2 – Pénalisation de la contrainte de demande.** On considère un problème de planification de production avec les données suivantes :

- $N$ unités de production, $T$ pas de temps.
- Chaque unité de production $i$ a un planning de production $p_i \in \mathbb{R}^T$ pour les $T$ pas de temps. (Elle va fournir au temps $t$ la production $p_i^t \in \mathbb{R}$.) L'unité $i$ a aussi ses propres coûts $c_i(p_i)$ et ses contraintes $p_i \in P_i$. On suppose aussi que, pour tout $u \in \mathbb{R}^T$, on peut résoudre le "problème local"

  $$\max_{p_i\in P_i} u^\top p_i - c_i(p_i)$$

  On note $\theta_i(u)$ la valeur optimale de ce problème local et $p_i(u) \in P_i$ une solution optimale.
- La variable du problème planification de production est $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^{T\times N}$, les contraintes $P = P_1 \times \cdots \times P_N$ et le coût total $c(p) = \sum_{i=1}^N c_i(p_i)$.
- On dispose enfin d'une prévision de demande $d \in \mathbb{R}^T$ pour les $T$ pas de temps.

L'objectif est minimiser le coût total de production en répondant "au mieux" à la demande : répondre exactement à la demande $d$ peut être très contraignant et peu judicieux (car $d$ n'est qu'une prévision de demande, éventuellement erronée). On pénalise donc la contrainte de demande avec une fonction $V\colon \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ continue, positive et telle que $V(0) = 0$. On s'intéresse ainsi au problème

$$\left\{\begin{array}{l}\min \quad c(p) + V\big(d - \sum_{i=1}^N p_i\big)\\ \quad p \in P\end{array}\right.$$

qu'on va attaquer par dualité.

**a)** On introduit une variable supplémentaire pour écrire le problème sous la forme :

$$(\mathrm{P}) \quad \left\{\begin{array}{l}\min \quad c(p) + V(z)\\ \quad d - \sum_{i=1}^N p_i = z\\ \quad p \in P, z \in \mathbb{R}^t.\end{array}\right.$$

Mettre ce problème sous la forme du cours. Donner l'expression de la fonction duale en fonction de $d$, des $\theta_i$ et de $V^*$ (la fonction conjuguée de $V$).

**b)** Soit $v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe ; on suppose à présent que $V$ a la forme suivante :

$$V(z) = \sum_{t=1}^T v(z_t).$$

Donner l'expression de $V^*$ en fonction de $v^*$.

**c)** Pour toute la suite de l'exercice, on prend la fonction $v$ définie, pour $s \in \mathbb{R}$, par

$$v(s) = \max\{-m\, s, M\, s\} \qquad \text{avec deux constantes } m > 0 \text{ et } M > 0.$$

Montrer que $v^*$ est l'indicatrice du segment $[-m, M]$ (c'est-à-dire : $v^*(\ell) = 0$ si $\ell \in [-m, M]$, et $v^*(\ell) = +\infty$ sinon). En déduire que le problème dual s'écrit alors

$$(\text{D}) \quad \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^N \theta_i(u) - u^\top d \\ & -m \leqslant u_t \leqslant M \quad \text{pour tout } t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

Notons $\Theta(u) = \sum_{i=1}^N \theta_i(u) - u^\top d$ la fonction objectif de ce problème.

**d)** Donner un sous-gradient de la fonction $\theta_i$ en un $u \in \mathbb{R}^T$. En déduire l'expression d'un sous-gradient de la fonction $\Theta$. [Indication : on a besoin du résulat suivant que l'on peut démontrer en question bonus : soient $f_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes ; si $g_1 \in \partial f_1(x)$ et $g_2 \in \partial f_2(x)$, alors $g_1 + g_2 \in \partial(f_1 + f_2)(x)$.]

**e)** On dispose ainsi d'un oracle pour la fonction duale. Appliquons la méthode des faisceaux pour résoudre (D) : on suppose qu'on est à l'itération $k$ de cet algorithme ; écrire le sous-problème quadratique qui donne $u_{k+1}$. Par quoi diffèrent les sous-problèmes à deux itérations successives ?

On va maintenant améliorer le modèle de la fonction duale pour construire une nouvelle version de l'algorithme des faisceaux, potentiellement plus rapide.

**f)** Proposer un modèle de la fonction $\Theta$ qui exploite le fait que c'est une somme.

**g)** Écrire le sous-problème quadratique qui correspond à une itération d'un algorithme des faisceaux utilisant cette structure. Comparer avec l'algorithme précédent : dans quel cas, et pourquoi, il est plus avantageux d'utiliser le second algorithme ?

**Exercice 3 – Affectation linéaire et faisceaux.** Considérons le problème d'affectation

$$(\text{P}) \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^n \; x_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^n \; x_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{for all } i, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

**a)** Écrire (P) sous forme matricielle, et donner une interprétation « matricielle » du problème.

**b)** On veut dualiser les $n$ premières contraintes dans (P) : écrire le problème (P) sous la forme du cours. Écrire le lagrangien $L(\cdot; \cdot)$ associé à ce problème.

**c)** Montrer qu'il existe une matrice $X_u$ qui maximise $L(\cdot; u)$ à $u$ fixé.

**d)** Montrer qu'on peut calculer $X_u$. Indice : remarquer que la maximisation de $L(\cdot, \lambda)$ se découple par rapport à chaque colonne $u_i$ de la matrice $U$.

Le reste de l'exercice se fait sur un logiciel de calcul numérique du type MATLAB ou SCILAB. On fixe la dimension $n = 10$ et la matrice des coûts $A = [1 : n]' * [1 : n]$.

**e)** Faire un programme qui calcule la matrice $X_u$ à l'aide de la fonction `max` de MATLAB/SCILAB.

**f)** Utiliser le programme précédent pour écrire un oracle de la fonction duale $\theta$, c'est-à-dire un programme qui prend $u$ en entrée et qui ressort $\theta(u) = L(X_u, u)$ et $g(u) = -c(X_u) \in \partial\theta(u)$.

**g)** On rappelle qu'à l'itération $k$ de la méthode des faisceaux, on résoud le problème quadratique

$$\begin{cases} \min \quad r + \dfrac{1}{2}\|u - \hat{u}^k\|^2 \,, & (u, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,, \\ \quad \theta(u^j) + (u - u^j)^\top g^j \leqslant r, & j = 1, \ldots, k \,. \end{cases} \tag{3}$$

Mettre ce probème dans le format d'entrée du solver quadratique (fonction `quadprog` en MATLAB, ou `qld` en SCILAB).

**h)** Programmer une fonction MATLAB/SCILAB implémentant la méthode de faisceaux. Pour faire simple dans un premier temps, ne pas considérer de test d'arrêt et simplement mettre un nombre maximal d'itérations.

**i)** Faire des expériences avec le simulateur pour le problème d'affectation.