Ensimag 2A – automne 2015
TDs optimisation
Alejandro Blumentals, Franck Iutzeler, Jérôme Malick

TD 1 – Rappels de calcul différentiel

Exercice 1 – Différentiabilité de la norme au carré. Calculer, avec simplement la définition, la différentielle en $a \in \mathbb{R}^n$ de l'application $\|\cdot\|^2$, norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ au carrée. En déduire son gradient en $a \in \mathbb{R}^n$. Retrouver cette expression en utilisant les dérivées partielles.

Exercice 2 – Lemme de composition.

a) Soient A une matrice de taille n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$; on définit l'application $f(x) := \|Ax - b\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\nabla f(a)$.

b) Calculer le gradient en $x \neq 0$ de la fonction $\|\cdot\|$ norme euclidienne.

c) Soit $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable ; on définit l'application $\varphi(x) := \|G(x)\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer $\nabla\varphi(a)$.

Exercice 3 – Hessien. Calculer le gradient et le Hessien des fonctions suivantes :

a) $f(x) := x^\top A\, x + p^\top x + c$, avec A une matrice symétrique de taille n, p un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c une constante réelle.

b) $g(x) := \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$, avec $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions 2 fois différentiables.

Exercice 4 – Sandwich. Considérons deux applications

$$m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

différentiables en a et vérifiant

$$m(a) = f(a) = M(a) \qquad \text{et} \qquad m(y) \leqslant f(y) \leqslant M(y)$$

pour y proche de a. Montrer que f est différentiable en a, avec $\nabla f(a) = \nabla m(a) = \nabla M(a)$.

Exercice 5 – Conditions d'optimalité. Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

a) Pour toute direction $u \in \mathbb{R}^n$, on définit l'application $q(t) := f(\bar{x} + t\,u)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $q'(t)$.

b) Supposons que f soit deux fois différentiable. Calculer $q''(t)$. (Utiliser le lemme de composition).

On suppose que f admet un minimum local en $\bar{x}$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } \bar{x}, \qquad f(x) \geqslant f(\bar{x}).$$

c) En utilisant le développement de Taylor-Young de la fonction q au premier ordre en 0, montrer que $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

d) En utilisant le développement au second ordre, montrer que $\nabla^2 f(\bar{x})$ est « semidéfinie positive » (ce qui est aussi appelé « positive », c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $u^\top \nabla^2 f(\bar{x})\, u \geqslant 0$).

e) Pour le cas de la dimension $n = 2$, donner les conditions sur les dérivées partielles équivalentes aux deux propriétés des questions précédentes.