Ensimag 2A, UJF M1 – automne 2009
TDs optimisation
Jérôme Malick

La technique de reformulation utilisée dans l'exercice **2a** (pour transformer le problème de meilleure approximation au sens de la norme $\infty$ en un problème linéaire) est très utile : elle permet d'ajouter une variable pour « pousser la fonction-objectif dans les contraintes ». Cette technique est générale et se peut se justifier simplement « à la main » ; mais pour éviter toute confusion, en voici une justification précise, complétant la correction donnée en TD ce matin.

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $C \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Considérons le problème

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x) \\ \quad x \in C, \end{array} \right.$$

et supposons qu'il en existe une solution. Alors (P) est « équivalent » au problème

$$(\mathrm{P'}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad r \\ \quad f(x) \leqslant r \\ \quad (x,r) \in C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \end{array} \right.$$

au sens où

(i) si $\bar{x}$ est solution de (P), alors $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ est solution de (P') [donc il existe une solution à (P')] ;

(ii) si $(\bar{x}, \bar{r})$ est solution de (P'), alors $\bar{x}$ est solution de (P).

Montrons ce résultat, commencons par (i). Soit $\bar{x}$ une solution de (P). Notons tout d'abord que $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ est réalisable pour (P'). Ensuite prenons $(x,r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un point réalisable pour (P'). On a en particulier $x \in C$ et donc $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$. On a aussi $f(x) \leqslant r$ et donc finalement $f(\bar{x}) \leqslant r$, ce qui montre que $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ est solution pour (P').

Il y a (au moins) deux raisonnements pour montrer (ii).

1. Méthode « optimisation ». Soit $(\bar{x}, \bar{r})$ une solution pour (P'). On a nécessairement $f(\bar{x}) = \bar{r}$ : si ce n'était pas le cas $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (réalisable) donnerait une valeur de fonction-objectif strictement plus petite que $\bar{r}$, ce qui est absurde. On peut donc dérouler le raisonnement : pour tout $x \in C$, le point $(x, f(x))$ est réalisable pour (P') donc $\bar{r} \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$, ce qui permet de conclure que $\bar{x}$ est solution de (P).

2. Méthode « directe ». Soit $(\bar{x}, \bar{r})$ solution pour (P'). On a notamment que $\bar{x} \in C$, c'est-à-dire réalisable pour (P). Pour tout $x \in C$, le point $(x, f(x))$ est réalisable pour (P'), et donc on a $\bar{r} \leqslant f(x)$. Bien sur, on a aussi que $(\bar{x}, \bar{r})$ est réalisable dans (P'), donc $f(\bar{x}) \leqslant \bar{r}$. Finalement on a bien $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$, ce qui permet de conclure que $\bar{x}$ est solution de (P).