Ensimag 2A – automne 2015
TDs optimisation
Alejandro Blumentals, Franck Iutzeler, Jérôme Malick

TD 2 – Problèmes linéaires, quadratiques - reformulations

Exercice 1 – Problème séparable.

a) Soient $f\colon X \to \mathbb{R}$ et $g\colon Y \to \mathbb{R}$; montrer que l'on peut « découpler » la minimisation de $f+g$:

$$\inf_{(x,y)\in X\times Y} f(x)+g(y) \;=\; \left(\inf_{x\in X} f(x)\right) + \left(\inf_{y\in Y} g(y)\right)$$

Montrer aussi que si le minimum est atteint pour f par $\bar{x}\in X$ et pour g par $\bar{y}\in Y$, alors $(\bar{x},\bar{y})$ atteint le minimum de $f+g$ sur $X\times Y$.

b) Soient $c,\ell,u\in\mathbb{R}^n$; résoudre explicitement la minimisation de $c^\top x$ sous la contrainte $\ell \leqslant x \leqslant u$ (minimiser une fonction linéaire sur un rectangle).

Exercice 2 – Reformuler... comme problème linéaire.

a) Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $C\subset\mathbb{R}^n$; considérons le problème

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x\in C, \end{array}\right.$$

et supposons qu'il en existe une solution. Montrer que (P) est « équivalent » au problème

$$(\mathrm{P'}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad r \\ \quad f(x)\leqslant r \\ \quad (x,r)\in C\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^{n+1}, \end{array}\right.$$

au sens où

(i) si $\bar{x}$ est solution de (P), alors $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ est solution de (P') [donc il existe une solution à (P')] ;

(ii) si $(\bar{x},\bar{r})$ est solution de (P'), alors $\bar{x}$ est solution de (P).

b) Soient $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ et $b\in\mathbb{R}^m$ (avec $m>n$ et $b\notin \operatorname{Im} A$) ; reformuler le problème de minimiser $\|Ax-b\|_\infty$ (meilleure approximation en norme ℓ_∞) comme un problème linéaire.

c) Mettre le problème linéaire sous la forme

$$(\mathrm{P''}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & p^\top z \\ & Cz\leqslant d \end{array}\right.$$

pour exhiber les entrées de la fonction `linpro` de Scilab (solver de problèmes linéaires) et dont l'appel de base est `[z] = linpro(p,C,d)`.

Exercice 3 – Reformuler comme problèmes linéaires II. Soient $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ et $b\in\mathbb{R}^m$ (avec $m>n$ et $b\notin\operatorname{Im} A$). Comme pour l'exercice précédent (en adaptant la technique de la question **a** sans donner des détails), reformuler les deux problèmes suivants sous la forme (P").

a) Minimiser $\|Ax-b\|_1$ (meilleure approximation en norme ℓ_1).

b) Minimiser $\|x\|_1$ sous contrainte $\|Ax-b\|_\infty\leqslant 1$ (plus « petite » solution).

Exercice 4 – Problèmes linéaires particuliers. Soient $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$ et $c,\ell,u\in\mathbb{R}^n$. Notons aussi e le vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec que des 1. Résoudre explicitement les problèmes d'optimisation linéaire suivants. (Conseil : faire des dessins).

a) Minimiser $c^\top x$ sous contrainte $e^\top x = 1$ et $x\geqslant 0$ (minimiser une fonction linéaire sur le simplexe).

b) Minimiser $c^\top x$ sous contrainte $Ax=b$ (minimiser une fonction linéaire sur un espace affine).

Exercice 5 – Reformulation comme un problème quadratique. Considérons le problème d'optimisation (non-différentiable)

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) + \|x - x_0\|^2 \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

où f est défini comme un max de fonctions affines

$$f(x) := \max_{i=1,\ldots,N} \{ {a_i}^\top (x - x_i) + b_i \}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que (P) peut se réécrire comme un problème quadratique.

b) Mettre ce problème quadratique sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} z^\top Q\, z + p^\top z \\ & Cz \leqslant d \end{array} \right.$$

pour exhiber les entrées de la fonction `quapro` de Scilab qui résoud ces problèmes et dont l'appel de base est `[z] = quapro(Q,p,C,b)` .