Alejandro Blumentals, Franck Iutzeler, Jérôme Malick

TD 3 – convexité (ensembles, fonctions), problèmes quadratiques

Exercice 1 – Convexité et enveloppe.

a) Vérifier qu'un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, $\forall x_i \in C$, $\forall \alpha_i \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i x_i \in C$.

b) L'enveloppe convexe d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est définie comme le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant A – que l'on note conv A. Montrer que

$$\operatorname{conv} A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, \kappa \in \mathbb{N}, a_i \in A, \alpha_i \geqslant 0, \text{ tels que } x = \textstyle\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i a_i \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1\}\,.$$

Exercice 2 – Ensembles convexes de matrices. Soit $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices définies positives

$$\mathcal{S}_n^{++} = \{X \in \mathcal{S}_n : w^\top X w > 0, \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n, w \neq 0\},$$

et $\mathcal{S}_n^{+}$ l'ensemble des matrices positives (on dit aussi semi-définies positives)

$$\mathcal{S}_n^{+} = \{X \in \mathcal{S}_n : w^\top X w \geqslant 0, \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ et $\mathcal{S}_n^{+}$ sont convexes. Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}$ est un cône. Qu'en est-il de $\mathcal{S}_n^{++}$?

b) Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}$ est fermé. Quelle est l'adhérence de $\mathcal{S}_n^{++}$?

c) Montrer que $\mathcal{S}_n^{+} = \{X \in \mathcal{S}_n : \lambda_{\max}(-X) \leqslant 0\}$. Déduire la convexité de $\mathcal{S}_n^{+}$ par un autre argument.

Exercice 3 – Fonctions convexes. Donner le domaine où les fonctions suivantes sont convexes

a) $f(x,y) = x + 2y + y^2$ définie sur $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = x + 2y + y^2/x$ définie sur $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Exercice 4 – Fonctions supports. Calculer la fonction-support

$$\sigma_C(x) := \sup_{y \in C} \ x^\top y \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n$$

pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants :

a) C la boule euclidienne de rayon 1 ;

b) $C = (\mathbb{R}^+)^n$ l'orthant positif ;

c) $C = [a, b]$ le segment joinant deux points a et b dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5 – Meilleure approximation polynômiale. Considérons N points dans le plan : $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pour $i = 1, \ldots, N$. On cherche un polynôme de degré au plus n qui approche le nuage de points au mieux au sens des moindres carrés ; en d'autres termes, on cherche $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour minimiser la quantité $\sum_{i=1}^{N} |p(x_i) - y_i|^2$.

a) Montrer que ce problème s'écrit

$$\min_{z \in \mathbb{R}^d} \ \|Vz - b\|_2{}^2,$$

avec une variable z dont la dimension d est à préciser. Donner explicitement V et b.

b) Écrire les conditions d'optimalité de ce problème. Préciser si elles sont nécessaires et/ou suffisantes.

c) On suppose que les colonnes de V sont indépendantes. Montrer qu'il existe une unique solution au problème ; la donner explicitement.

d) Montrer que si $N \geqslant n+1$ et si les x_i sont tous différents, alors les colonnes de V sont indépendantes. Que se passe-t-il si $N < n+1$?

Exercice 6 – Minimisation quadratique sans contraintes. Considérons le problème :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \inf & \frac{1}{2}\, x^\top Q\, x + b^\top x + c \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

a) Résoudre (P) dans le cas où $Q \in \mathcal{S}_n^{++}$.

b) Dans le cas général ($Q \in \mathcal{S}_n$), montrer que (P) est « bien posé » (le inf n'est pas $-\infty$) si et seulement si $Q \in \mathcal{S}_n^{+}$ et $b \in \operatorname{Im} Q$.

c) Montrer qu'alors $x^\star = -Q^\dagger b$ est solution de (P). ($Q^\dagger$ est la pseudo-inverse de Q).