Ensimag 2A – automne 2015
TDs optimisation
Alejandro Blumentals, Franck Iutzeler, Jérôme Malick

# TD 4 – Conditions d'optimalité avec égalités et inégalités

**Exercice 1 – Et pour commencer, un peu d'algorithme : stabiliser Newton.** Nous souhaitons résoudre une équation $F(x) = 0$ avec $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1$. On suppose que le jacobien $JF(x)$ est toujours inversible, et on propose d'utiliser la « méthode de Newton pour résoudre les équations » pour le problème $F(x) = 0$. Une itération de cette méthode est :

$$x_{k+1} = x_k - [JF(x_k)]^{-1}F(x_k). \tag{N}$$

On considère maintenant la fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \;x \;\longmapsto \|F(x)\|_2{}^2. \end{cases}$$

**a)** Calculer le gradient $\nabla\varphi(x)$.

**b)** Montrer que $d_k = -[JF(x_k)]^{-1}F(x_k)$ est une direction de descente de $\varphi$ en $x_k$ (si $F(x_k) \neq 0$).

**c)** Comment pourrait-on stabiliser l'itération (N) ?

**Exercice 2 – Minimum sur la sphère.** Soit $c$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul ; résoudre

$$\begin{cases} \min \quad c^\top x \\ \quad \|x\|^2 = 1. \end{cases}$$

Visualer le problème et la solution en dimension 2.

**Exercice 3 – Sur l'hypothèse de régularité.** Soit le problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \min \quad x + y^2 \\ \quad x^3 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Écrire les conditions d'optimalité. Quel est le souci ?

**Exercice 4 – Exo du cours avec une contrainte en plus.** Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $e = [1, \dots, 1]^\top$ et $c = [1, 0, \dots, 0]^\top$. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \max \quad c^\top x \\ \quad e^\top x = 0 \\ \quad \|x\|^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Visualiser, sur un dessin, le problème et la solution en dimension $n = 2$.

**Exercice 5 – Contraintes actives.** Soit l'ensemble $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x + y \leqslant 1,\; x \geqslant 0,\; y \geqslant 0\big\}$.

**a)** Dessiner $C$. En considérant les contraintes actives, exhiber 7 zones dans $C$.

**b)** Écrire les conditions d'optimalité de KKT. Sont-elles nécessaires et suffisantes ?

**c)** Trouver le minimum global de la fonction $f(x, y) = \exp(x - y) - x - y$ sur $C$.

**Exercice 6 – Minimisation convexe paramétrique.** Soient la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$f_a(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x$$

pour un paramêtre $\alpha \in \mathbb{R}$ et le problème

$$\begin{cases} \min \quad f_\alpha(x, y) \\ \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

**a)** Quand le problème est-il convexe ?

**b)** Le résoudre dans ce cas.