Alejandro Blumentals, Franck Iutzeler, Jérôme Malick

TD 5 – dualité lagrangienne

Exercice 1 — Retour sur un exo du TD précédent. Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $e = [1, \ldots, 1]^\top$ et $c = [1, 0, \ldots, 0]^\top$, et le problème convexe

$$\begin{cases} \max \quad c^\top x \\ \quad e^\top x = 0, \\ \quad \|x\|^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour s'entrainer à dualiser, on applique le méchanisme sur ce problème, dualisant les deux contraintes. Écrire donc le problème dual, le résoudre et en déduire une solution du problème primal.

Exercice 2 — Un petit problème de type production. On considère le problème suivant dans $\mathbb{R}^2$ (p représentant des productions et d une demande)

$$F(d) := \begin{cases} \min \quad 5p_1 + 10p_2 \\ \quad p_1 + p_2 \geqslant d \\ \quad p \in \{0, 3\} \times [0, 1] \end{cases} \tag{P_d}$$

a) Calculer en fonction de $d \in [0, 4]$, la solution optimale $p(d)$. Tracer le graphe de F.

b) Introduisant le lagrangien

$$L_0(p; \lambda) := -5p_1 - 10p_2 - \mu(-p_1 - p_2)\,,$$

on va commencer par dualiser le problème (P_0). Calculer en fonction de $\mu \geqslant 0$ le maximum p^μ du lagrangien. Tracer le graphe de la fonction duale résultante $\theta_0(\mu)$.

c) Former maintenant le dual de (P_d), et exprimer sa fonction duale θ_d à partir de θ_0. Quel est le minimum de θ_d pour $d = 2$?

Exercice 3 — Méthode des régions de confiance. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ; on veut utiliser une méthode par région de confiance pour résoudre

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \min \quad f(x) \\ \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On suppose qu'à l'itéré courant x on dispose d'une estimation $M \in \mathcal{S}_n^+$ du hessien $\nabla^2 f(x)$; l'itéré suivant $x + d$ est construit avec la solution du problème suivant

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \min \quad \frac{1}{2} d^\top M d + \nabla f(x)^\top d \\ \quad \frac{1}{2}\|d\|^2 \leqslant \delta, \\ \quad d \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $\delta > 0$ est un paramètre choisi par ailleurs.

a) Montrer qu'il existe une solution à (C).

b) Écrire (C) avec un max (pour être mis sous la forme du cours), puis écrire le lagrangien associé à la dualisation de la contrainte $\frac{1}{2}\|d\|^2 - \delta \leqslant 0$, en introduisant une variable duale réelle $\mu \geqslant 0$.

c) Fixons $\mu > 0$; montrer que le lagrangien admet alors un unique maximum (selon d).

d) Dans ce cas, calculer le vecteur $d(\mu)$ qui réalise le maximum.

e) Montrer que si x n'est pas tel que $\nabla f(x) = 0$, alors $d(\mu)$ est une direction de descente pour f.

f) Appelons (D) le problème dual associé au lagrangien précédent. Montrer que (D) admet une solution $\mu^\star$ et qu'il n'y a pas de saut dual.

On suppose pour les deux dernières questions que $\mu^\star > 0$.

g) Montrer que la fonction duale est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa valeur $\theta(\mu)$ et sa dérivée $\theta'(\mu)$.

h) Que donne un simulateur de la fonction duale ? Comment peut-on résoudre ce problème dual (D) ? Est-ce un problème "facile" ? Comment résoudre le problème (C) ? Pourquoi est-ce important de résoudre rapidement (C) ?

Exercice 4 – Entropie et dualité. Nous souhaitons estimer un vecteur inconnu $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs, dont nous ne connaissons que certaines de ses « réalisations », c'est-à-dire nous ne connaissons que ${a_i}^\top \bar{x} = b_i$, pour des $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $b_i \in \mathbb{R}$ connus ($i = 1, \ldots, m$), avec $m < n$. On note A la matrice dont les lignes sont les ${a_i}^\top$, et $b \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des b_i.

Parmi tous les vecteurs vérifiant ces conditions, on décide de préférer un vecteur « entropique » défini comme une solution du problème (où log est le logarithme népérien)

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{k=1}^n x_k \log(x_k) \\ & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{array} \right.$$

a) Considérons la fonction $\varphi_\alpha \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi_\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{cl} t\log(t) + \alpha\, t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{array} \right.$$

Montrer que φ_α est convexe et coercive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Noter que φ_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, en déduire que φ_α est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

c) Donner le t qui atteint le minimum de φ_α sur $\mathbb{R}_+$, ainsi que la valeur de ce minimum.

Revenons à présent au problème (P), que l'on va résoudre par dualité. On suggère de dualiser uniquement la contrainte couplante $Ax = b$.

d) Mettre le problème sous la forme du cours. Donner l'expression du lagrangien, et donner la définition de la fonction duale et du problème dual. On notera λ la variable duale, θ la fonction duale et (D) le problème dual.

e) Observer que la maximisation du lagrangien (à λ fixé) se découple en n problèmes. Donner l'unique $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ qui maximise le lagrangien (à λ fixé).

f) Montrer que θ est différentiable, et donner l'expression de $\theta(\lambda)$ et de $\nabla\theta(\lambda)$ en fonction de x_λ.

g) Supposons qu'il existe une solution duale qu'on note λ^*. Comment la calculer ?

h) Montrer que x_{λ^*} est réalisable dans le primal.

i) En déduire que x_{λ^*} est une solution primale.

j) Expliquer finalement comment répondre à la question initiale de cet exercice.